Cours d' Algèbre 1

Said AISSAOUI

3 décembre 2022

Table des matières

Chapitre 3

Structures algébriques

3.1 Loi de composition interne

3.2 Groupes

Le premier Mathématicien qui a utilisé le mot "groupe" est ***Evarist Galois*** (1811 – 1832)*, on retrouve la structure de groupes dans différents domaines, en physique avec les groupes de symérie d'un objets, en mathématiques dans la résolution des équations algébriques, en arithmétique ...etc.*

Définition 3.2.1 *On appelle groupe, tout ensemble G muni d'une loi de composition interne $\star$ telle que :*

❶ $\star$ *est associative* : $\boxed{\forall a, b, c \in G : (a \star b) \star c = a \star (b \star c)}$.

❷ *L'existence d'élement neutre e* : $\boxed{\exists e \in G, \forall x \in G : a \star e = e \star a = a}$.

❸ *Tous les éléments de G sont symétrisables* : $\boxed{\forall a \in G, \exists a' \in G : a \star a' = a' \star a = e}$.

Si de plus $\star$ est commutative, $\forall\, a, b \in G : a \star b = b \star a$, le groupe est dit commutatif ou abélien.

Exemples 30 ✔ $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ *, sont tous des groupes commutatifs.*

- ✔ $(\mathbb{Q}^*,.)$, $(\mathbb{R}^*,.)$, $(\mathbb{C}^*,.)$ *, sont tous des groupes commutatifs.*
- ✔ $(\mathbb{Z}^*,.)$ *n'est pas un groupe,* 3 *n'est pas symétrisable. les seuls éléments qui sont symétrisables dans* $\mathbb{Z}^*$ *sont* 1 *et* -1
- ✔ $(\mathbb{R},.)$ *n'est pas un groupe :* 0 *n'est pas symétrisable.*
- ✔ $(\mathbb{N},+)$ *n'est pas un groupe : aucun élément différent de* 0 *n'est symétrisable.*
- ✔ *Soit E un ensemble. On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E, $(\mathfrak{S}(E),\circ)$ est un groupe appelé groupe symétrique de E.*
- ✔ *L'ensemble des isométries (Ie. des transformations qui préservent les distances) du plan est un groupe .*

Exercice 31 *On définit la loi $\star$ sur $]-1,\ 1[$ par*

$$\forall x, y \in]-1,\ 1[,\ x \star y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(]-1,\ 1[,\ \star)$ est un groupe commutatif.

Solution 32 ❶ *Premièrement, on doit d'abord montrer que la loi $\star$ est une loi de composition interne (LCI) : $\forall x, y \in]-1,\ 1[$, a-t-on $x \star y \in]-1,\ 1[$? Montrons que $-1 < x \star y < 1$.*

✔ *Montrons que $-1 < x \star y$, on a*

$$-1 < x \star y \iff -1 < \frac{x+y}{1+xy} \iff -1 - xy < x + y \iff 0 < 1 + x + xy + y$$
$$\iff 0 < (1+x) + y(1+x) \iff 0 < (x+1)(y+1).$$

comme $x, y \in]-1,\ 1[$ alors $0 < (x+1)(y+1)$ d'où $-1 < x \star y$.

✔ *Montrons que* $x \star y < 1$*, on a*

$$x \star y < 1 \iff \frac{x+y}{1+xy} < 1 \iff x+y < 1+xy \iff x - xy + y - 1 < 0$$
$$\iff x(1-y) - (1-y) < 0 \iff (1-y)(x-1) < 0.$$

comme $x, y \in]-1,\ 1[$ *alors* $(1-y)(x-1) < 0$ *d'où* $x \star y < 1$.

et donc on a $\forall x, y \in]-1,\ 1[, x \star y \in]-1,\ 1[,$ *par conséquent* $\star$ *est une loi de composition interne dans* $]-1,\ 1[$.

❷ *Montrons que la loi* $\star$ *est associative.* $\forall x, y, z \in]-1, 1[, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

$$(x \star y) \star z = (\frac{x+y}{1+xy}) \star z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz}.$$

et un calcul similaire donne le même résultat pour $x \star (y \star z)$.

❸ *L'existence d'élément neutre* $\exists e \in]-1,\ 1[, \forall x \in]-1,\ 1[,\ x \star e = e \star x = x$.

$$e \star x = x \iff \frac{e+x}{1+ex} = x$$
$$\iff e + x = x(1+ex) \iff e = ex^2$$
$$\iff e - ex^2 = 0 \iff e(1-x^2) = 0$$
$$\iff e = 0 \quad (\textit{puisque } x \in]-1,\ 1[)$$

et on a $x \star 0 = x$ *donc l'élément neutre pour* $\star$ *est* $e = 0$.

❹ *Les éléments symétrisables de* $]-1,\ 1[$. $\forall x \in]-1,\ 1[,\ \exists x' \in]-1,\ 1[,$ *tel que* $x \star x' = x' \star x = 0$.

$$x \star x' = 0 \iff \frac{x+x'}{1+xx'} = 0$$
$$\iff x + x' = 0$$
$$\iff x' = -x$$

,

et vérifie que $(-x) \star x = 0,$ *on remarque que si* $x \in]-1,\ 1[$ *alors* $-x \in]-1,\ 1[$*, d'où chaque élément de* $]-1,\ 1[$ *est symétrisable.*

conclusion

$$(]-1,\ 1[,\ \star) \textit{ est un groupe.}$$

Remarque 33 *Si la loi est commutative, pour chercher l'élément neutre et les éléments symétriques, il suffit de résoudre une seule équation, par exemple pour l'élément neutre, on résoud soit l'équation $e \star x = x$ soit l'équation $x \star e = x$.*

Exercice 34 *. On définit sur l'ensemble $G = \mathbb{R} - \{2\}$ une loi de composition notée $\star$ par :*

$$\forall x,\ y \in G,\ x \star y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.

Solution 35 *. ⚠ ✍ Attention, la première chose à vérifier , c'est de s'assurer que la loi de composition est interne $(\forall x,\ y \in G, x \star y \in G)$.*

Les proprétés suivantes sont fondamentales pour les groupes :

Proposition 4 *. Soit $(G, \star)$ un groupe alors on a :*

❶ *Un groupe est toujours non vide, il contient au moins un élément neutre.*

❷ *L'élément neutre est unique.*

❸ *Le symétrique d'un élément est unique.*

❹ *Pour tout élément $a \in G$: $a \star x = a \star y \Longrightarrow x = y$*
(Il suffit de composer à gauche a^{-1}).

❺ *Pour tout élément $a \in G$: $x \star a = y \star a \Longrightarrow x = y$*
(Il suffit de composer à droite a^{-1}).

❻ *Pour tous $a, b \in G$, l'équation $a \star x = y$ a une solution unique :*
$x = a^{-1} \star b$.

❼ $\forall x,\ y \in G,\ (x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$ *(attention au changement de sens dans l'inverse du produit)*

❽ $\forall x \in G,\ (x^{-1})^{-1} = x$.

Démonstration 3.2.0.1 ✘ *Pour montrer l'unicité de l'élément neutre e, on suppose qu'il existe un autre élément neutre e'*

$$\begin{aligned} e \star e' &= e \quad (e' \text{ élément neutre}) \\ &= e' \quad (e \text{ élément neutre}). \end{aligned}$$

d'où $e = e^{'}$.

✘ *Pour montrer l'unicité du symétrique de l'élément* x, *on suppose qu'il existe un autre élément symétrique* $x^{"}$

$$\begin{aligned} x \star x^{'} = e &\Longleftrightarrow x^{"} \star (x \star x^{'}) = x^{"} \star e \\ &\Longleftrightarrow (x^{"} \star x) \star x^{'} \quad (\star \text{ associative}) \\ &\Longleftrightarrow e \star x^{'} = x^{"} \quad (e \text{ élément neutre}). \end{aligned}$$

d'où $x^{"} = x^{'}$.

✘ *Cherchons le sumétrique de* $x \star y$.

$$\begin{aligned} (x \star y) \star (x \star y)^{-1} = e &\Longleftrightarrow x^{-1} \star (x \star y) \star (x \star y)^{-1} = x^{-1} \star e \\ &\Longleftrightarrow (x^{-1} \star x) \star y \star (x \star y)^{-1} = x^{-1} \\ &\Longleftrightarrow e \star y \star (x^{-1} \star x) \star y \star (x \star y)^{-1} = x^{-1} \\ &\Longleftrightarrow y \star (x \star y)^{-1} = x^{-1} \\ &\Longleftrightarrow y^{-1} \star (y \star (x \star y)^{-1}) = y^{-1} \star x^{-1} \\ &\Longleftrightarrow (y^{-1} \star y) \star (x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1} \\ &\Longleftrightarrow e \star (x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1} \\ &\Longleftrightarrow (x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}. \end{aligned}$$

d'où

$$(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$$

3.2.1 Sous groupes

Définition 3.2.2 *Soit* $(G, \star)$ *un groupe et* H *une partie de* G.
On dit que $(H, \star)$ *est un sous groupe de* $(G, \star)$, *Si* $(H, \star)$ *est lui même un groupe pour la loi* $\star$ *restreinte à* H.

Théorème 36 *Une partie* H *d'un groupe* $(G, \star)$ *est un sous groupe si et seulement si :*

❶ H *non vide.*

❷ H *est stable par la loi de* $\star$, *c'est à dire* $\forall a, b \in H, a \star b \in H$.

❸ H *contient les symétriques de tous ses éléments.*

Démonstration 3.2.1.1 *1. Si H est un sous groupe de G, il est non vide et stable par la loi $\star$. Soit e' l'élément neutre de H, on a $e' \star e' = e' \star e$ donc $e = e'$. (En composant à gauche le symétrique de e').*
Soit $x \in H$, x a un symétrique x^{-1} au sens de G et un symétrique x' au sens de H, alors $x' \star x = e = x^{-1} \star x$, d'où $x' = x^{-1}$ et donc $x^{-1} \in H$, alors H contient les symétriques de tous ses éléments.

2. Soit H une partie de G vérifiants ❶, ❷, ❸. H est stable, vérifons que, muni de sa loi induite , c'est un groupe.

- *La loi induite est associative.*
- *Comme $H \neq \emptyset$, il existe $x \in H$, alors $x^{-1} \in H$, d'où $x \star x^{-1} = e \in H$, H posséde donc un élément neutre.*
- *Tout élément de H a un symétrique dans G , et d'après ❸ son symétrique est dans H. H est un groupe, donc c'est un sous groupe de G.*

En pratique, on caractérise le sous groupe, en regroupant la deuxième et la troisième propriété du théorème précédent, par :

Théorème 37 *Soit $G, \star$ un groupe d'élément neutre e. Soit H un sous ensemble de G si et seulement si :*

$$(H,\star) \text{ est un sous groupe de } (G,\star) \iff \begin{cases} \underline{e \in H} \\ \\ \underline{\forall x, y \in H,\ x \star y^{-1} \in H} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Démonstration 3.2.1.2 ◆ *La stabilité pour la loi $\star$ et que H contient tous les symétriques de ses éléments entrainent 3.2.3.*

◆ *Réciproquement, si on a (3.2.3), alors si $x \in H$, on a donc $e \star x^{-1} = x^{-1} \in H$, d'où H contient tous les symétriques de ses éléments. Si x, $y \in H$ a-t-on $x \star y \in H$?, si $y \in H$ alors $y^{-1} \in H$, donc $x \star y = x \star (y^{-1})^{-1} \in H$, d'où La stabilité de H par rapport à $\star$.*

Exemples 38 ✔ *Si $(G,\star)$ un groupe d'élément neutre e, alors G et $\{e\}$ sont des sous groupes de G.*

✔ $(\mathbb{Z},+)$ *est un sous groupe de* $(\mathbb{Q},+)$ *qui est lui même un sous groupe de* $(\mathbb{R},+)$. *on a*

$$\begin{cases} \underline{0 \in \mathbb{Z}} \\ \\ \underline{\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x+(-y) \in \mathbb{Z}} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

✔ $(2\mathbb{Z},+)$ *est un sous groupe de* $(\mathbb{Z},+)$.*on a*

$$\begin{cases} \underline{0 \in \mathbb{Z}} \\ \\ \underline{\forall x, y \in 2\mathbb{Z},\ x+(-y) \in 2\mathbb{Z}} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

En effet,

$$\begin{aligned} x, y \in 2\mathbb{Z} &\Longrightarrow \exists k, k^{'} \in \mathbb{Z},\ \textit{tels que}\ \ x = 2k \ \textit{et}\ y = 2k^{'} \\ &\Longrightarrow x+(-y) = 2k+(-2k^{'}) = 2(k-k^{'}) \in 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

✔ $(2\mathbb{Z}+1,+)$ *n'est pas un sous groupe de* $(\mathbb{Z},+)$. *L'ensemble* $2\mathbb{Z}+1$ *n'est pas stable par rapport à* $+$. *Soient par exemple* $3,\ 5 \in 2\mathbb{Z}+1$, *mais* $3+5 = 8 \notin 2\mathbb{Z}+1$

✔ *L'ensemble des rotations, des symétries centrales et des translations du plan est un sous groupe des isométries du plan.*

Exercice 39 *Soient* H_1, H_2 *deux sous groupes du groupe* $(G, \star)$.

❶ *Montrer que* $H_1 \cap H_2$ *est un sous groupe de* $(G, \star)$.

❷ *Montrer qu'en général,* $H_1 \cup H_2$ *n'est pas un sous groupe de* $(G, \star)$.

Solution 40 ✙ *On a* $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ *car* $e \in H_1 \cap H_2$. *En effet ,* $e \in H_1$ *et* $e \in H_2$. *(* $H_1,\ H_2$ *sont des sous groupes). Soient* $x, y \in H_1 \cap H_2$

$$\begin{aligned} x,\ y \in H_1 \cap H_2 \Longrightarrow\ & x,\ y \in H_1 \ \textit{et}\ x,\ y \in H_2. \\ \Longrightarrow\ & x \star y^{-1} \in H_1 \ \textit{et}\ x \star y^{-1} \in H_2\,, \quad (H_1,\ H_2 \ \textit{sont des sous groupes}). \\ \Longrightarrow\ & x \star y^{-1} \in H_1 \cap H_2. \end{aligned}$$

✙ *Pour la réunion, on a* $2\mathbb{Z}$ *et* $3\mathbb{Z}$ *deux sous groupes de* $(\mathbb{Z},\ +)$, *mais* $(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z})$ *n'est pas un sous groupe de* $(\mathbb{Z},\ +)$ *, car il n'est pas stable pour l'addition. Si on prend* $x = 2 \in 2\mathbb{Z}$ *et* $y = 3 \in 3\mathbb{Z}$ *mais* $2+3 = 5 \notin (2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z})$

3.2.2 Homomorphismes de groupes

Définition 3.2.3 *Soient* $(G,\star)$, $(G^{'},\Delta)$ *deux groupes. On appelle homomorphisme du groupe de* G *dans* $G^{'}$ *toute application* $f:(G,\star)\longrightarrow(G^{'},\Delta)$ *telle que :*

$$\boxed{\forall x,\ y\in G:\ f(x\star y)=f(x)\,\Delta f(y)}$$

❶ *On appelle endomorphisme de groupes tout homomorphisme de groupes entre un groupe et lui même.*

❷ *On appelle isomorphisme de groupes tout homomorphisme de groupe* ***bijectif****.*

❸ *On appelle automorphisme de groupes tout isomorphisme d'un groupe dans lui même.*

Remarque 41 *Dans certains ouvrages, on utilise "morphisme de groupes" au lieu de "homomorphisme de groupes"*

Exemples 42 ✔ *L'application* $f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{R}^{*+},.)$ *telle que* $f(x)=e^x$*, est un homomorphisme de groupes. En effet*

$$f(x+y)=e^{x+y}=e^x.e^y=f(x).f(y).$$

✔ *L'application* $f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{R},+)$ *telle que* $f(x)=3x$*, est un automorphisme de groupes.*

✔ *L'application* $f:(\mathbb{R}_+^*,.)\longrightarrow(\mathbb{R},+)$ *telle que* $f(x)=\ln(x)$*, est un isomorphisme de groupes. En effet,*

$$\forall x,\ y\in\mathbb{R}_+^*,\ f(xy)=\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)=f(x)+f(y).$$

$$f \text{ est bijective } \Longleftrightarrow \forall y\in\mathbb{R},\ \exists! x=e^y\in\mathbb{R}_+^*,\ \text{tel que } y=\ln(x).$$

✔ *L'application* $f:(\mathbb{C}^*,.)\longrightarrow(\mathbb{R}^*,.)$ *telle que* $f(z)=|z|$*, est un homomorphisme de groupes. En effet, on a :*

$$\forall z,\ z^{'}\in\mathbb{C}^*,\ f(z.z^{'})=|z.z^{'}|=|z|.|z^{'}|=f(z).f(z^{'})$$

Théorème 43 *Soit f un homorphisme de groupe de $(G_1,\star)$, $(G_2,\ \Delta)$ e_1, e_2 éléments neutre de G_1, G_2 respectivement), alors on a :*

❶ $f(e_1) = e_2$.

❷ $\forall x \in G_1,\ f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.

❸ *L'image d'un sous groupe de G_1 par f est un sous groupe de G_2.*

❹ *L'image réciproque d'un sous groupe de G_2 est un sous groupe de G_1.*

Démonstration 3.2.2.1 *1. On a :*

$$\begin{aligned} f(e_1 \star e_1) = f(e_1)\Delta f(e_1) &\Longrightarrow f(e_1) = f(e_1)\Delta f(e_1) \\ &\Longrightarrow [f(e_1)]^{-1}\Delta f(e_1) = [f(e_1)]^{-1}\Delta\big(f(e_1)\Delta f(e_1)\big) \\ &\Longrightarrow e_2 = \big([f(e_1)]^{-1}\Delta f(e_1)\big)\Delta f(e_1) \\ &\Longrightarrow e_2 = f(e_1). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \forall x \in G_1, f(x \star x^{-1}) = f(x)\Delta f(x^{-1}) &\Longrightarrow f(e_1) = f(x)\Delta f(x^{-1}) \\ &\Longrightarrow e_2 = f(x)\Delta f(x^{-1}) \\ &\Longrightarrow [f(x)]^{-1}\Delta e_2 = [f(x)]^{-1}\Delta\big(f(x)\Delta f(x^{-1})\big) \\ &\Longrightarrow [f(x)]^{-1} = \big([f(x)]^{-1}\Delta f(x)\big)\Delta f(x^{-1}) \\ &\Longrightarrow [f(x)]^{-1} = e_2\Delta f(x^{-1}) \\ &\Longrightarrow [f(x)]^{-1} = f(x^{-1}). \end{aligned}$$

3. Soit H un sous groupe de G_1, montrons que $f(H)$ est un sous groupe de G_2. Premièrement, $f(H) \neq \emptyset$, car $e_2 = f(e_1) \in f(H)$.
$Deuxièment,\ soient\ x,\ y \in f(H), estceque\ x\Delta y^{-1} \in f(H)?$.
Soient $x,\ y \in f(H)$, alors $\exists t,\ s \in H$ tels que $x = f(t)$ et $y = f(s)$. on a alors :

$$\begin{aligned} x\Delta y^{-1} &= f(t)\Delta[f(s)]^{-1} = f(t)\Delta f(s^{-1} \\ &= f(t\star s^{-1}) \in f(H).(\ car\ t\star s^{-1} \in H.\ et\ H\ sous\ groupe\ de\ G_1) \end{aligned}$$

4. Soit H un sous groupe de G_2, montrons que $f^{-1}(H)$ est un sous groupe de G_1. Premièrement, $f^{-1}(H) \neq \emptyset$, car $e_2 = f(e_1) \in H$, donc $e_1 \in f^{-1}(H)$

Deuxièment, soient $x, y \in f^{-1}(H)$, *est ce que* $x\Delta y^{-1} \in f^{-1}(H)$?. *Autrement dit est ce* $f(x\Delta y^{-1}) \in H$?

$$ona : f(x\Delta y^{-1}) = f(x)\Delta f(y^{-1}) = f(x)\Delta[f(y)]^{-1} \in H.(\text{ car } H \text{ sous groupe de } G_2)$$

3.2.3 Noyau et image

Définition 3.2.4 *Soient* $(G_1,\star)$ *et* $(G_2,\top)$ *deux groupes et* $f : G_1 \longrightarrow G_2$ *est un homomorphisme de groupe de* $(G_1,\star)$ *dans* $(G_2,\top)$.

❶ *On appelle noyau de* f, *noté* $\ker f$, *l'ensemble*

$$\boxed{\ker f == f^{-1}(\{e_2\}) = \left\{x \in G_1 \ / f(x) = e_2\right\}}.$$

❷ *On appelle image de* f, *noté* Imf, *l'ensemble*

$$\boxed{Im f = =f(G_1) = \left\{f(x) \in G_2 \ / x \in G_1\right\}}.$$

Théorème 44 *Soit* f *un homomorphisme de* $(G_1,\star)$ *dans* (G_2,Δ).

❶ $\ker f$ *est un sous groupe de* G_1.

❷ Imf *est un sous groupe de* G_2.

❸ f *injective* $\Longleftrightarrow \ker f = \{e_1\}$.

❹ f *surjective* $\Longleftrightarrow Imf = G_2$.

Démonstration 3.2.3.1

3.3 Anneaux

3.4 Corps