Université A. Mira Bejaia
Faculté des Sciences Exactes — 06 – 04 – 2021
Département de Mathématiques /M.I — Durée : 1h30mn
Première année M.I.

Examen d'Algèbre 1

Exercice 1. (03 points)

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ une fonction continue }\}$. On considère les assertions suivantes :

P : « $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ».

R : « $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), [(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)]$ ».

1. Donner la négation de P et la négation de R.

2. L'implication $\overline{P} \Longrightarrow \overline{R}$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. (**Interrogation**) (10 points)

Soient f et g deux applications définies par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

1. Montrer que f est injective.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, déterminer $f^{-1}(\{a\})$. f est-elle surjective ?

3. En déduire l'ensemble $\mathbf{D}$ tel que

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbf{D} \\ x & \longmapsto & h(x) = f(x) \end{array}$$

soit bijective. Déterminer l'application réciproque h^{-1}.

4. En déduire que l'application $g \circ h$ est bijective. Déterminer $(g \circ h)^{-1}$ par deux méthodes différentes.

Exercice 3. (04 points)

On définit sur $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Donner et représenter le graphe de $\mathcal{R}$.

3. Déterminer suivant la relation $\mathcal{R}$, les classes d'équivalence suivantes : $\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2}$.

Exercice 4. (03 points)

On définit dans $\mathbb{Z}^2$ la loi de composition interne $(\star)$ par :

$$\forall (a,b), (a',b') \in \mathbb{Z}^2, \quad (a,b) \star (a',b') = (aa', -3bb').$$

1. Calculer $(1,2) \star (3,4)$.

2. La loi $(\star)$ est-elle commutative ? Admet-elle un élément neutre ?