



Examen d'Algèbre 2

Il est interdit d'utiliser la calculatrice et le téléphone.

Il sera tenu compte de la rédaction.

Exercice 1. (07 points)

1) On considère l'ensemble $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z = t = 0\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , en donner une base et la dimension.

2) On considère le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par

$$F = \{(a, a + b, -a + c, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Donner une base et la dimension de F .

3) Montrer que E et F sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .

4. Soit G un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une base de G .

La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre de G ? Est-elle génératrice de G ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. (13 points)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement à la base \mathcal{B} est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'expression analytique de f relativement à la base \mathcal{B} .

2) Déterminer le noyau de f . En déduire le rang de f et $\text{Im}f$. L'application f est-elle bijective? Justifier.

3) Soit $w = (3, 0, 1)$. Montrer que w admet un unique antécédant par f que l'on déterminera.

4) Soient $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 0)$.

Montrer que l'on peut compléter la famille $\{v_1, v_2\}$ par un vecteur choisi dans \mathcal{B} pour former une base de \mathbb{R}^3 .

5) Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, e_1)$ une nouvelle base de \mathbb{R}^3 .

a) Déterminer la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . Calculer P^{-1} .

b) Déterminer la matrice A' associée à f relativement à la base \mathcal{B}' par deux méthodes.

c) Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1} .

d) En déduire $(A')^{-1}$.

