



Corrigé-type de la série de TD n°01. Microéconomie II

Première partie : Questions du cours et de réflexion

1. La droite d'iso-coût peut être définie comme étant le lieu géométrique (ou la représentation graphique) de toutes les combinaisons de facteurs (K et L) qui peuvent être obtenues avec le même coût total (CT).

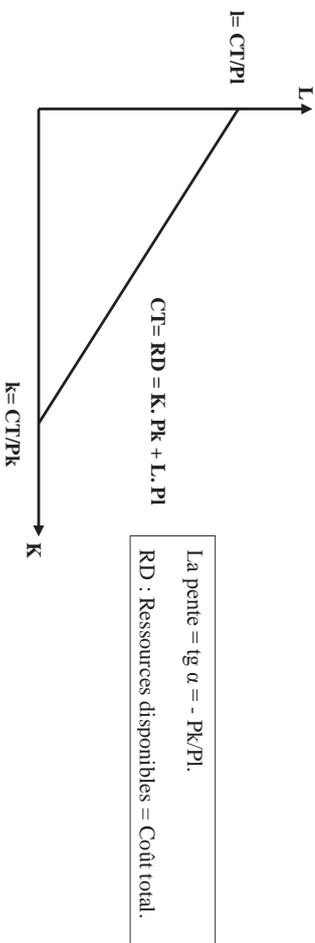


Figure n°01 : La droite d'iso-coût

- Dans la théorie du comportement du producteur, il y a lieu de distinguer les coûts de courte période et les coûts de longue période. En courte période la capacité de production installée au démarrage de l'activité de l'entreprise ne peut changer ; il existe simultanément des coûts fixes et des coûts variables, alors qu'en longue période l'entrepreneur fait varier la taille de ses équipements, tous les facteurs et tous les coûts sont variables.
- Le glissement de la droite budgétaire du producteur à droite signifie la baisse du prix du facteur capital (K) et son glissement à gauche signifie donc l'augmentation du prix du capital, toutes choses égales par ailleurs.
- Dans l'analyse du comportement du producteur, on distingue deux approches d'analyse, à savoir :

A-1- l'approche technique par les fonctions de production, qui s'intéresse à étudier principalement la relation entre le volume de production (P) et les quantités de facteurs (K et L) nécessaires à la production de (P), [P = f(K, L), PPM et PPMn] ;

B-1- l'approche économique s'intéresse par contre à étudier la relation entre les quantités vendues (RT = Pu. P) et les prix des facteurs de production (les coûts CT ou les ressources disponibles, CT = K. Pk + L. Pl).

Deuxième partie : L'équilibre du producteur et l'équation du sentier d'expansion.

Exercice n°01 :

On a : p = f(K, L) = 6 K^{1/2}L^{2/3}. Les données : Rd = 1400^{DA} ; Pk = 6^{DA} et Pl = 5^{DA}.

1. Calcul des quantités optimales de k et l :

a. Formalisation du problème :
$$\begin{cases} \text{Max } p = f(k, l) = 6k^{1/2}l^{2/3} \\ \text{S/C} \\ \text{Rd} = 6k + 5l \end{cases}$$

b. Construction de la fonction de Lagrange :

$$L(k, l, \lambda) = f(k, l) + \lambda (Rd - kP_k - lP_l)$$

$$L(k, l, \lambda) = 6k^{1/2}l^{2/3} + \lambda(1400 - 6k - 5l)$$

c. Résolution du problème :

La fonction de Lagrange (L) atteint son maximum lorsque ses dérivées partielles par rapport à (k, l et λ) sont égales à zéro :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(k, l, \lambda)}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial L(k, l, \lambda)}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial L(k, l, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial k} - \lambda P_k = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial l} - \lambda P_l = 0 \\ \text{Rd} - kP_k - lP_l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\partial p}{\partial k} \\ \lambda = \frac{\partial p}{\partial l} \\ \text{R} = kP_k + lP_l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{6 \cdot \frac{1}{2} k^{-1/2} l^{2/3}}{6} \\ \lambda = \frac{6 \cdot \frac{2}{3} k^{1/2} l^{-1/3}}{5} \\ 1400 = 6k + 5l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{k^{-1/2} l^{2/3}}{2} \dots \dots \dots (1) \\ \lambda = \frac{4k^{1/2} l^{-1/3}}{5} \dots \dots \dots (2) \\ 1400 = 6k + 5l (3) \end{cases}$$

On a : (1) = (2) $\Leftrightarrow \frac{5k^{-1/2} l^{2/3}}{2} = \frac{4k^{1/2} l^{-1/3}}{5} \Leftrightarrow \frac{5k^{-1/2} l^{2/3}}{8k^{1/2} l^{-1/3}} = 1 \Leftrightarrow \frac{5l}{8k} = 1$

$$1400 = 6k + 5l \Leftrightarrow 1400 = 6k + 5 \left(\frac{8k}{5} \right) \Leftrightarrow 1400 = 6k + 8k \Leftrightarrow 1400 = 14k \Leftrightarrow k = 100$$

$$k = \frac{5}{8} * 160 = 100 \text{ Unités.}$$

Donc, la combinaison de facteurs (k, l) = (100, 160) est celle qui permet au producteur de maximiser le volume de production (on parle de combinaison optimale) pour des ressources disponibles (ou CT) égales à 1400^{DA}.

2. L'effet d'une augmentation des ressources disponibles de 80^{DA} sur la quantité produite :

a. Le niveau de la production à l'équilibre :

$$\text{Max } p = f(100, 160) = 6 (100)^{1/2} (160)^{2/3} = 1768,335 \text{ Unités}$$

b. La valeur du multiplicateur de Lagrange :

À l'équilibre, on a : $\lambda = \frac{P_{m\&k}}{P_k} = \frac{P_{m\&l}}{P_l}$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{6 \cdot \frac{1}{2} (100)^{-1/2} (160)^{2/3}}{6} = 1,4736 \text{ Unités/DA} \\ \lambda = \frac{6 \cdot \frac{2}{3} (100)^{1/2} (160)^{-1/3}}{5} = 1,4736 \text{ Unités/DA} \end{cases}$$

$\lambda = 1,4736$, c'est-à-dire que le volume de production s'accroît de la valeur $\lambda(1,4736)$ à chaque accroissement de l'PA de ressources disponibles ($\lambda = \frac{\Delta P}{\Delta R_d}$).

Donc, lorsque $\Delta R_d = +80$ DA, on aura : $\Delta P = \lambda * \Delta R_d = 1,4736 * (80) = +117,6$ Unités.

3. Calcul du TMST_{K à L} pour K=6 et L=4:

$$TMST_{K \text{ à } L} = \frac{P_{m8g}}{P_{m8l}} = \frac{6,5k^{-1,5}l^{1,5}}{6,5k^{2,5}l^{1,5}} = \frac{3l}{4k} \text{ Pour } (K, L) = (6, 4), \text{ on aura : } TMST_{K \text{ à } L} = \frac{3*4}{4*6} = 0,5.$$

$$TMST_{L \text{ à } K} = \frac{1}{TMST_{K \text{ à } L}} = 2.$$

4. La variation nécessaire du facteur travail pour pouvoir produire la même quantité tout en diminuant de 4 unités la quantité du facteur capital :

On a: $TMST_{L \text{ à } K} = 2$, c'est-à-dire que le producteur remplace 2 unités de K par une unité de L. S'il abandonne 4 unités de K il lui faudra, pour produire le même volume, augmenter L de 2 unités.

	Δk	Δl	ΔP
$TMST_{L \text{ à } K} = 2$	-2	+1	0
	-4	Δl	0
			$\Rightarrow \Delta l = \frac{(+1)*(-4)}{(-2)} = +2$ Unités.

5. Calcul de l'élasticité partielle de la production par rapport au facteur K :

$$e_{P/K} = \frac{\partial P}{\partial k} * \frac{k}{P} = \frac{6,5k^{-1,5}l^{1,5}k}{6,5k^{2,5}l^{1,5}} = 0,5$$

6. Lors d'une variation relative de 20% du facteur capital et sachant que : $e_{P/K} = 0,5$, c'est-à-dire chaque variation de 1% de k, a pour conséquence une variation de 0,5% de la production, on aura :

	$\Delta k/k$	$\Delta P/P$
	+1%	+0,5%
$e_{P/K} = 0,5$	+20%	$\Rightarrow \Delta P/P = \frac{(+0,5\%)*(+20\%)}{(+1\%)} = +10\%$.

Donc, le volume de production va s'accroître de 10%.

7. Le degré d'homogénéité :

$$\text{On a : } f(ak, al) = 6, (ak)^{\frac{1}{2}}(al)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}}k^{\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}}f(k, l) = a^{1,16} \cdot p.$$

Donc, p est une fonction de production homogène de degré $\lambda = 1,166$.

Les rendements d'échelle pour cette fonction sont croissants. Cela signifie que l'augmentation simultanée et dans les mêmes proportions de K et de L, induit une augmentation plus que proportionnelle (plus importante) du volume de production.

Exercice n°02 :

$$P = f(k, l) = \frac{2}{5}k^2l^2. P_K = 225 \text{ DA}, P_L = 100 \text{ DA et } P_0 = 64800 \text{ rames de papier}$$

1) Déterminez les quantités des facteurs de production capital et travail utilisées par l'entreprise Bêta pour satisfaire la commande du client (C).

a) Formalisation du problème

Le problème d'optimisation posé ici est celui de la recherche du coût minimum permettant de réaliser une production donnée ($P_0 = 64800$ rames de papier), le problème transcrit mathématiquement s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Min } CT = R_d k + P_l l \\ S \\ C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Min } CT = 225k + 100l \\ S \\ C \end{cases} \begin{cases} P_0 = f(k, l) = \frac{2}{5}k^2l^2 \\ C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Min } CT = 225k + 100l \\ S \\ C \end{cases} \begin{cases} 64800 = \frac{2}{5}k^2l^2 \\ C \end{cases}$$

b) Construction de la fonction de Lagrange

En d'autres termes, il s'agit de trouver les valeurs (K, L) du point de contact entre l'isoquant $P_0 = 64800$ rames de papier et la droite de budget ayant pour pente (-2,25) ; en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange, on peut écrire :

$$L(K, L, \lambda) = CT + \lambda(P - f(K, L))$$

$$L(K, L, \lambda) = 225k + 100l + \lambda(64800 - \frac{2}{5}k^2l^2).$$

$$L(K, L, \lambda) = 225k + 100l + \lambda(64800 - \frac{2}{5}k^2l^2)$$

c) Résolution du problème

Cette fonction admet des solutions, si ses dérivées partielles s'annulent au même temps :

$$\text{Min } L(K, L, \lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L(K, L, \lambda)}{\partial K} = 0 & 225 - \frac{2}{5}\lambda l^2 = 0 & \lambda = \frac{(225)(5)}{2l^2} \dots \dots \dots (1) \\ \frac{\partial L(K, L, \lambda)}{\partial L} = 0 & 100 - \frac{4}{5}\lambda k l = 0 & \lambda = \frac{(100)(5)}{4kl} \dots \dots \dots (2) \\ \frac{\partial L(K, L, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 & 64800 - \frac{2}{5}k^2l^2 = 0 & 64800 = \frac{2}{5}k^2l^2 \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

$$\text{On a: } (1) = (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(225)(5)}{2l^2} = \frac{(100)(5)}{4kl} \dots \dots \dots (4) \\ 64800 = \frac{2}{5}k^2l^2 \dots \dots \dots (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2l = 9k \\ 64800 = \frac{2}{5}k^2l^2 \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} l = \frac{9}{2}k \dots \dots \dots (4) \\ 64800 = \frac{2}{5}k^2l^2 \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

On remplace la valeur de « l » dans l'équation (3) et on obtient:

$$\frac{2}{5}k(\frac{9}{2}k)^2 = 64800 \Leftrightarrow k^3 = \frac{(64800)(20)}{(2)(81)} \Leftrightarrow k = \left(\frac{648000}{81}\right)^{1/3} = 20 \text{ unités}$$

$$l = \frac{9}{2}(20) = 90 \text{ unités}$$

Donc, la combinaison de facteurs (K, L) = (20 ; 90) est celle qui permet à l'entreprise Bêta de minimiser le coût de production, tout en produisant une quantité P=64800 rames de papier.

2) Quel serait l'effet d'un accroissement des ressources disponibles de l'entreprise Bêta de 20% sur la quantité produite à l'équilibre ? (Prenez trois chiffres arrondis après la virgule)

$$R_d = 225k + 100l = 225(20) + 100(90) = 4500 + 9000 = 13500 \text{ DA}$$

$$\frac{\Delta R_d}{R_d} * 100\% = +20\% \Rightarrow \Delta R_d = +0,2(13500) = +2700 \text{ DA}$$

$$\lambda = \frac{500}{4(20)(90)} = 0,069 \text{ Rame de papier/DA}$$

$$\text{On a : } \lambda = \frac{\Delta P}{\Delta R d} \Rightarrow \Delta P = \lambda * \Delta R d = 186,3 \text{ Rames de papier}$$

Donc, l'augmentation des ressources disponibles de l'entreprise Béta de 20% (2700DA) induit une augmentation du niveau de production de 186,3 rames de papier.

3) L'entreprise Béta peut produire la même quantité de rames (64800), tout en réduisant la quantité calculée à la question n°1 du facteur travail (L) de 5%. Calculez, dans ce cas, la variation nécessaire de la quantité utilisée du facteur capital (K). (02,5 pts)

$$TMST_{K \Delta L} = \frac{P_{PMK}}{P_{PMG}} = \frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{2}{5} * \frac{5}{4} * \frac{1}{k} = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2(20)} = 2,25$$

$$\Delta L * 100\% = -05\% \Rightarrow \Delta L = (-0,05)(90) = -4,5 \text{ Unités}$$

	ΔL	ΔK	ΔP
$TMST_{K \Delta L} = 2,25$	-2,25 Unités	+1 Unité	0
	-4,5 Unités	ΔK	0
		$\Rightarrow \Delta K = \frac{(-4,5) * (+1)}{(-2,25)} = +02 \text{ Unités.}$	

L'entreprise Béta doit augmenter la quantité utilisée du facteur capital de 02 unités pour qu'elle puisse garder constante la quantité produite (64800 rames de papier), tout en diminuant la quantité utilisée du facteur travail de 5% (4,5 unités). La combinaison optimale dans ce cas est : E(22 ; 85,5)

4) L'entreprise Béta désire augmenter la quantité produite des rames de papier de 10%, déterminez la variation correspondante de la quantité utilisée du facteur travail (L) (toutes choses égales par ailleurs).

$$e_{P/L} = \frac{\Delta P}{\Delta L} * \frac{L}{P} = \frac{4}{5} * k l * \frac{L}{5 k l^2} = 2$$

$$\text{On a : } e_{P/L} = \frac{\Delta P}{\Delta L} = \frac{P}{L} = \frac{+10\%}{2} = +05\%$$

Ou encore :

	$\Delta L/L$	$\Delta P/P$
$e_{P/L} = 02$	+01%	+02%
	$\Delta L/L$	+10%
	$\Rightarrow \Delta L/L = \frac{(+01\%) * (+10\%)}{(+02\%)} = +05\%.$	

Pour qu'elle puisse augmenter le volume de production de 10% (6480 rames de papier), tout en maintenant constant le facteur capital (20 unités), l'entreprise Béta doit augmenter la quantité du facteur travail de 05% (4,5 unités).

5) Dans ces conditions, dites comment évolue le volume de production P ? (Justifiez par les calculs nécessaires votre réponse)

Accroître la taille de l'entreprise en doublant simultanément les quantités des facteurs de production capital (K) et travail (L), revient à multiplier par 2 les quantités de facteurs K et L. On peut écrire donc :

$$f(2k, 2l) = \frac{2}{5} (2k) (2l)^2 = (2) (2)^2 \frac{2}{5} k l^2 = 2^3 * P = 8 P$$

Lorsqu'on double les quantités de facteurs de production K et L, le volume de production sera multiplié par 8.

La variation relative de la production est :

$$\frac{\Delta P}{P} * 100\% = \frac{8P - P}{P} * 100\% = \frac{P(8-1)}{P} * 100\% = +700\%$$

Donc, le volume de production va s'accroître de 700% suite à l'augmentation simultanée des quantités des facteurs de production capital et travail de 100%

6) Déduisez (sans calcul) la nature des rendements d'échelle

D'après ce qui vient d'être développé en réponse à la question précédente, le volume de production augmente de 700% suite à une augmentation simultanée des quantités utilisées des facteurs de production capital (K) et travail (L) de 100%. Le volume de production augmente donc de façon plus que proportionnelle à l'augmentation simultanée des quantités utilisées des deux facteurs de production. Cette relation de causalité entre les quantités utilisées des facteurs de production et la quantité produite correspond à la notion de rendements d'échelle croissants. Le degré d'homogénéité de la fonction de production ($\lambda=3>1$) confirme de plus que les rendements d'échelle de cette fonction sont croissants.

Exercice n°03 :

La courbe du sentier d'expansion (ou courbe d'échelle) exprime la manière dont varie l'équilibre du producteur lorsque varient les quantités des facteurs de production. En d'autres termes, la courbe du sentier d'expansion traduit l'activité de l'entreprise à mesure que se modifie son échelle (ou sa taille). Donc, pour déterminer l'équation de la courbe d'échelle ($l = f(k)$), il suffit d'appliquer la condition d'équilibre du producteur :

$$\frac{P_{PMK}}{P_{PMG}} = \frac{P_K}{P_L}$$

De cette condition, on aura : $\frac{\Delta L}{\Delta K} = \frac{5}{15} \Rightarrow l = \frac{1}{3} k$ est l'équation du sentier d'expansion.

Exercice n°01 :

1. Pour 2 000 exemplaires tirés, il faut utiliser uniquement l'imprimante n°1 car son coût par copie est le plus faible. Pour 3 000 copies, il faut utiliser l'imprimante n°1 pour 2 000 exemplaires, et l'imprimante n°2 pour les 1 000 autres.

2. Soit y le nombre de copies.

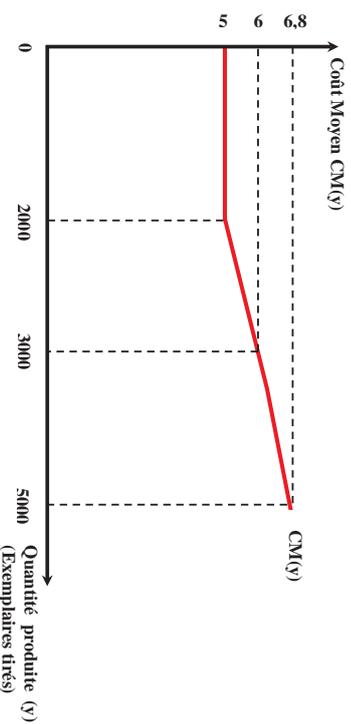
$$CT(y) = 5y \quad \text{si } y \leq 2\,000$$

$$CT(y) = 5 * 2\,000 + 8 * (y - 2\,000) \quad \text{si } 2\,000 < y \leq 5\,000$$

$$CM(y) = 5 \quad \text{si } y \leq 2\,000$$

$$CM(y) = 8 - 6000/y \quad \text{si } 2\,000 < y \leq 5\,000.$$

Figure n°02 : La représentation graphique du coût moyen CM(y)



Exercice n°02 :

Lorsque le niveau du capital est fixé, l'entreprise n'a pas de choix pour la quantité de travail à utiliser pour produire une quantité y donnée de produit.

Si $K = 1$, pour produire y , il faut utiliser $L_1 = 2y$, $CT_1(y) = 1 \times 2y + 10 \times 1 = 2y + 10$.

Si $K = 2$, pour produire y , il faut utiliser $L_2 = y$, $CT_2(y) = 1 \times y + 10 \times 2 = y + 20$.

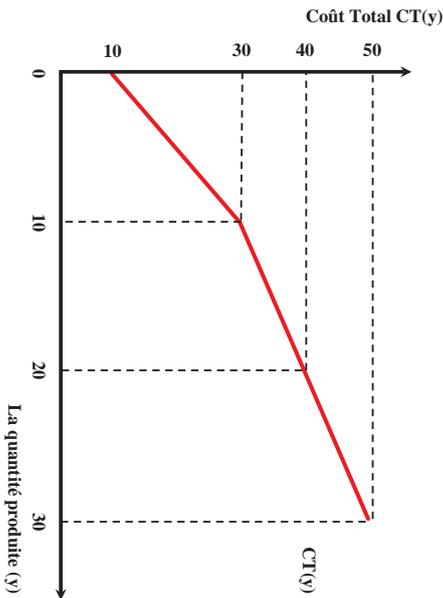
Il faut déterminer, en fonction de y , combien de capital il faut utiliser pour minimiser les coûts.

On peut facilement montrer que $CT_1(y) < CT_2(y)$ pour $y < 10$. Par conséquent :

$$CT(y) = \begin{cases} 2y + 10 & \text{si } y < 10 \\ y + 20 & \text{si } y > 10 \end{cases}$$

Notons que les deux coûts totaux ($CT_1(y)$ et $CT_2(y)$) sont égaux lorsque $y = 10$.

Figure n°03 : La représentation graphique du coût Total CT(y)



Exercice n°03 :

On a : $CT(P) = P^3 - 12P^2 + 72P$. Pour $P \in]0 ; 8[$.

1. Le coût marginal en fonction de P :

$$Cm(P) = \frac{dCT}{dP} = 3P^2 - 24P + 72$$

2. Les variations du coût marginal sur [0 ; 8]

Il faut dériver $Cm(P)$ et étudier le signe de $\left[\frac{dCm(P)}{dP}\right]$ ou utiliser les résultats concernant les polynômes du second degré.

$$\frac{dCm(P)}{dP} = 6P - 24 = 6(P - 4).$$

P	0	4	8
$Cm(P)'$	-	0	+
$Cm(P)$	72	24	72

3. Le coût marginal est minimal pour un volume de production :

$$\frac{dCm(P)}{dP} = 0 \Leftrightarrow 6P - 24 = 0 \Leftrightarrow 6(P - 4) = 0. \text{ Le coût marginal est minimum pour } P = 4 \text{ unités.}$$

4. Le coût moyen en fonction de P :

$$CM(P) = \frac{CT}{P} = \frac{P^3 - 12P^2 + 72P}{P} = P^2 - 12P + 72$$

5. Les variations du coût moyen sur [0 ; 8] :

Il faut dériver $CM(P)$ et étudier le signe de $\left[\frac{dCM(P)}{dP}\right]$

$$\frac{dCM(P)}{dP} = \frac{d(P^2 - 12P + 72)}{dP} = 2P - 12 = 2(P - 6).$$

P	0	6	8
$CM(P)'$	-	0	+
$CM(P)$	72	36	40

6. Le volume de production qui minimise le coût moyen :

1^{ère} méthode :

Pour déterminer le volume de production qui minimise le coût moyen, on calcule la première dérivée du coût moyen et cette dérivée doit être égale à zéro :

$$\frac{dCM(P)}{dP} = 0 \Leftrightarrow \frac{d(P^2 - 12P + 72)}{dP} = 0 \Leftrightarrow 2P - 12 = 0 \Leftrightarrow 2(P - 6) = 0 \Leftrightarrow P = 6 \text{ unités.}$$

2^{ème} méthode :

On sait que lorsque le coût moyen est à son minimum, il est égal au coût marginal :

$$CM(P) = Cm(P) \Leftrightarrow P^2 - 12P + 72 = 3P^2 - 24P + 72 \Leftrightarrow P(P - 12) = P(3P - 24) \Leftrightarrow P = 6 \text{ unités.}$$

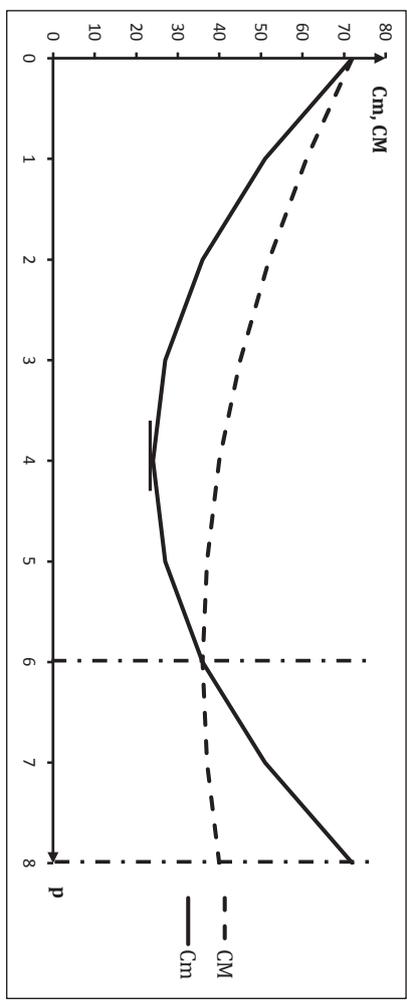
Donc, la quantité de production pour laquelle le coût moyen est minimum, c'est lorsque **P = 6 unités**

7. L'optimum de production.

On obtient le maximum de production lorsque le coût moyen est à son minimum. L'optimum de production correspond à : **P = 6 unités.**

8. La représentation graphique des courbes représentatives du coût marginal et du coût moyen.

Figure n°04 : La représentation graphique du coût marginal $Cm(p)$ et du coût moyen $CM(p)$



Le coût marginal est supérieur au coût moyen pour : $6 < p \leq 8$.