**Université Abderrahmane Mira de Béjaïa.**
**Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion.**
**Département SEGC-LMD.**
**Première année SEGC.**
**Année universitaire 2022/2023.**

**Mars 2023**

# Corrigé-type de la série de TD n°02. Microéconomie 2

## Première partie : Questions de cours et de réflexion

**1.** La fonction de coût de courte période peut être définie comme étant la relation mathématique entre les dépenses totales occasionnées par la production et les quantités optimales des facteurs correspondant à un coût minimum. La fonction de coût total qui résume cette relation indique pour chaque niveau de production, le coût minimal supporté par l'entreprise. Formellement ce coût minimal s'écrit comme une fonction des quantités produites : **CT = f(P) + CF = CV (P) + CF** ; avec : CV : Coût variable et CF : Coût fixe.

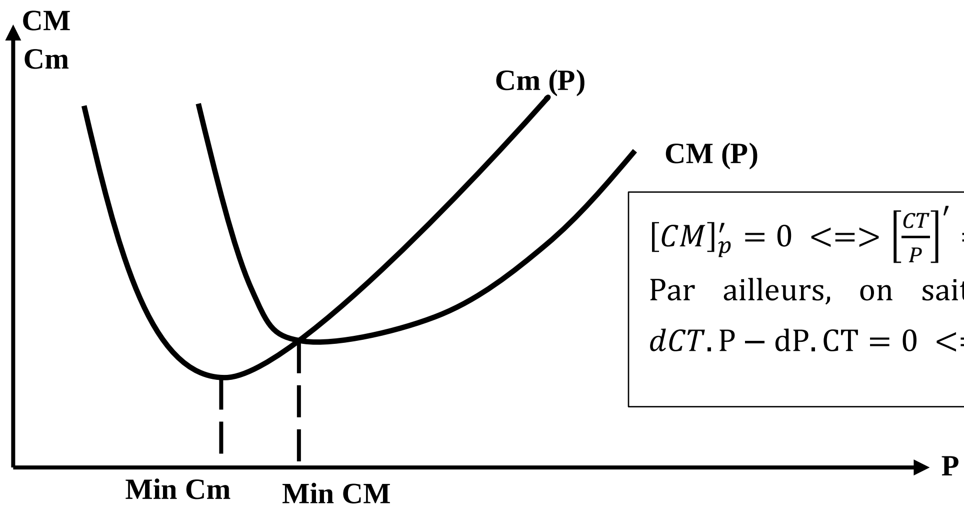
**2. Les expressions mathématiques des fonctions de coûts :**

CT = CF + CV

CM = CT/ P = (CF+CV)/P = CF/P + CV/P= CFM + CVM

$C_m = \frac{\partial \text{CT}}{\partial \text{P}} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta CT}{\Delta P} = CT'$(Première dérivée du coût total).

**3.** Pour démontrer que la courbe du coût marginal (Cm) coupe la courbe du coût moyen (CM) en son point minimum, il suffit d'annuler la première dérivée du coût moyen (Principe mathématique d'un optimum).




$[CM]'_p = 0 <=> \left[\frac{CT}{P}\right]' = 0 <=> \frac{dCT\,.P - dP.CT}{P^2} = 0$,
Par ailleurs, on sait que : $\forall$ P; $\text{P}^2 \neq 0$, donc :
$dCT.\text{P} - \text{dP.CT} = 0 <=> \frac{dCT}{\text{dP}} = \frac{CT}{P} <=> C_m = CM$

**Fig n° 1 : La représentation graphique du coût marginal et moyen**

**4.** Dans la théorie Néo-classique, on appelle un entrepreneur ou un producteur rationnel, un producteur qui cherche toujours à augmenter ses ventes de produits pour maximiser son profit (π), celui-ci sera donc le résultat :

1-du volume (quantité) de production ;

2-du niveau des coûts de production.

Maximiser la différence entre les recettes et les coûts : Max π = RT – CT.

Rationnel : la recherche d'un optimum sous contrainte.

**5.** La fonction de coût total de longue période est l'instrument qui enseigne le producteur sur le niveau minimal de coût total qu'il aura à supporter, lorsqu'il envisage de modifier sa capacité de production dans le but de répondre à une demande future de son marché (du produit P). Elle exprime le fait que le coût total de longue période (noté $CT_{LP}$) est une fonction du volume de production (P), dont l'équation est de la forme : $CT^{LP} = f(P)$.

**Deuxième partie : Les fonctions de coûts de production et les conditions de maximisation du profit.**

**Exercice n°01 :**

$\mathbf{CT(p) = 6P^3 + 30P^2 + 5P + 10}$. A partir de cette fonction de coût total, on détermine les autres fonctions de coûts :

$\mathbf{CFT} = \mathrm{CT} - \mathrm{CVT} = 10$ ; $\mathbf{CFM(p)} = \frac{\mathrm{CFT}}{\mathrm{P}} = \frac{10}{\mathrm{P}}$ ; $\mathbf{CTM(p)} = \frac{CT}{p} = \frac{6\mathrm{P}^3+30\mathrm{P}^2+5\mathrm{P}+10}{p} = 6\mathrm{P}^2 + 30\mathrm{P} + 5 + \frac{10}{P}$ ; $\mathbf{CVT(p)} = 6\mathrm{P}^3 + 30\mathrm{P}^2 + 5\mathrm{P}$ ; $\mathbf{CVM(p)} = \frac{\boldsymbol{CVT}}{\boldsymbol{P}} = \frac{6\mathrm{P}^3+30\mathrm{P}^2+5\mathrm{P}}{\boldsymbol{p}} = 6\mathrm{P}^2 + 30P + 5$ ; $\mathbf{Cm(p)} = \frac{dCT}{dP} = 18P^2 + 60P + 5$.

**Exercice n°02 :**

**1. L'expression du coût marginal :**

$$\mathrm{Cm}\ (\mathrm{Q}) = 10\mathrm{Q}$$

**2. Le nombre d'unités que l'entreprise doit produire pour maximiser son profit :**

On a : $\pi\ (Q) = RT - CT \ <=> P.Q - (8000 + 5Q^2)$

Le nombre d'unités (Q*) à réaliser doit vérifier la relation suivante :

$Max\ \pi <=> \frac{d\pi}{dQ} = 0$. On aura : $\mathrm{P} - 10\mathrm{Q}^* = 0 <=> P = 10Q^* <=> Q^*(P) = \frac{P}{10}$

L'entreprise a toujours intérêt à produire (à cause de ses coûts fixes) et fera des profits positifs si $P \geq$ Minimum du CM(Q)

Dans cette firme, le $CM = \frac{CT}{Q} = \frac{8000+5Q^2}{Q} = \frac{8000}{Q} + 5Q$.

Min CM(Q) $<=> \frac{dCM}{dQ}(\mathrm{Q}) = 0 \Leftrightarrow \frac{-8000}{Q^2} + 5 = 0 \ <=> \mathrm{Q} = 40$ pièces du savon, et le coût moyen minimal est CM (40) = $400^{DA}$.

L'entreprise produira une quantité $Q^* = \frac{P}{10}$ quel que soit P et fera des profits strictement positifs si P > $400^{DA}$.

**3. Le nombre d'unités de savon à réaliser pour maximiser le profit si le prix quadruple :**

$Q^*(4P) = 4\left(\frac{P}{10}\right) = 4Q^*(P)$, donc l'entreprise va quadrupler aussi la quantité produite.

**4. Calcul du profit et du nombre d'unités à réaliser pour maximiser le profit si le prix d'une pièce de savon est de $150^{DA}$**

$Q^*(150) = \frac{150}{10} = 15 => \pi\ (15) = (150)(15) - [8000 + (5)(15)^2] => \pi\ (15) = -6875 < 0$.

L'entreprise fait des pertes, mais préfère produire plutôt que d'arrêter son activité car $\pi\ (0) = -8000 < \pi\ (15)$ (la production vise à couvrir les coûts fixes)

**5. Calcul du profit et du nombre d'unités à réaliser pour maximiser le profit si le prix d'une pièce de savon est de $600^{DA}$**

$$Q^*(600) = \frac{600}{10} = 60 => \pi\ (60) = (600)(60) - [8000 + (5)(60)^2] => \pi\ (60) = 10000DA.$$

**Exercice n°03 :**

La fonction de coût de long terme $CT^{LT}(y)$ est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{k} CT^{CP}(y,k)$$

$k^{LT}$ doit vérifier : $\left.\frac{\partial CT^{CP}(y,k)}{\partial k}\right|_{k^{LP}} = 0$. Il est nécessaire de vérifier aussi la condition de second ordre :

$\left.\frac{\partial^2 CT^{CP}(y,k)}{\partial k^2}\right|_{k^{LP}} > 0.$

***Attention :*** Les dérivées sont par rapport à k, et non pas par rapport à y.

$\frac{\partial CT^{CP}(y,k)}{\partial k} = -\frac{1}{k^2}y^2 + 1 = 0$

$\frac{\partial^2 CT^{CP}(y,k)}{\partial k^2} = 2k^{-3}y^2 > 0$. La condition de second ordre est vérifiée pour tout $k > 0$ et $k^{LP} = y$.

En remplaçant k par y dans la fonction de coût total de courte période on aura la fonction de coût total de longue période :

$CT^{LP}(y) = CT^{CP}(y, k^{LP}) = y^3 - \left(4 - \frac{1}{y}\right)y^2 + \frac{49}{4}y + y = y^3 - 4y^2 + \frac{57}{4}y.$

**Exercice n°04 :**

**1. La fonction de coût total de courte période :**

À court terme, le facteur *K* est considéré comme un facteur fixe ($k = k_0$), où *ko* est une constante qui matérialise une certaine capacité de production installée.
Ainsi, la fonction de production devient une fonction à une variable et s'écrit :
$Q = f(k_0, l) = 2k_0^{1/2} l^{1/2}$……..(1)
Or, le coût total, par définition, est égal à la somme des dépenses en facteurs :
$CT = k_0.P_k + l.P_l$……(2)
De légalité (1), il est possible d'obtenir :

$$l = \left[\frac{Q}{2.k_0^{\frac{1}{2}}}\right]^2 = \frac{Q^2}{4.k_0} \quad (3)$$

Ainsi, en remplaçant l'expression de « l », donnée en (3), la fonction de coût total (2) peut s'écrire :

$$CT(Q) = k_0.P_k + \frac{Q^2}{4.k_0}.P_l$$

La fonction CT(Q) représente la fonction de coût total de courte période : elle fournit le coût d'une production donnée, pour un niveau donné de facteur fixe et pour des prix de facteurs donnés.

**2. Si $P_k$ = 2 et $P_l$ = 8, alors, le coût moyen de courte période s'écrit :**

$$CM(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{2k_0}{Q} + \frac{2Q}{k_0}$$

**Étude succincte du coût moyen :**

$$\frac{\delta CM(Q)}{\delta Q} = -\frac{2k_0}{Q^2} + \frac{2}{k_0}$$

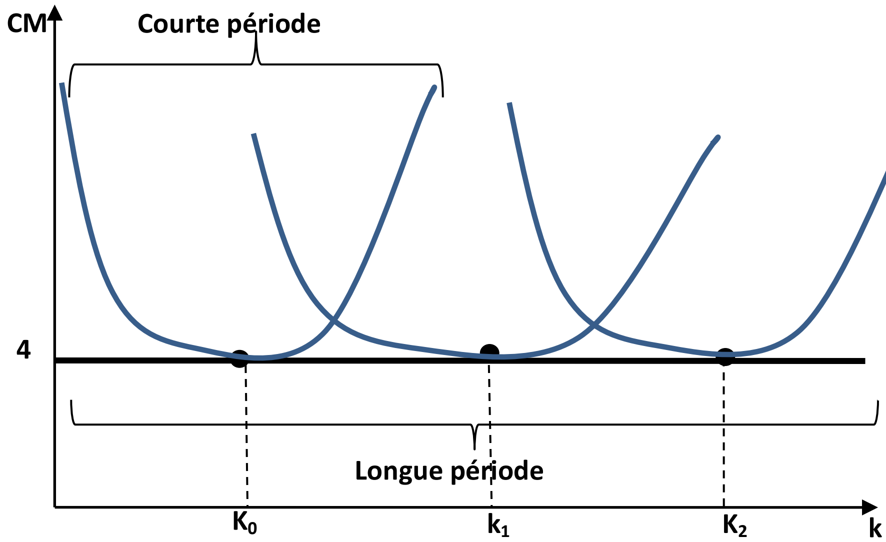
$CM'(Q) = 0 <=> \frac{dCT(Q)}{dQ} = 0 <=> Q = k_0$ (La solution négative ($-k_0$) est rejetée, car les quantités sont positives)

Calculons CM ($k_0$) : $\mathrm{CM}(\mathrm{k}_0) = \frac{2\mathrm{k}_0}{\mathrm{k}_0} + \frac{2\mathrm{k}_0}{\mathrm{k}_0} = 4$ (On remplace Q par $k_0$ dans l'expression du CM).

Ainsi, le point de coordonnées ($k_0$, 4) est le minimum du CM(Q)

$\lim_{Q\to 0^+} CM = +\infty$ ; $\lim_{Q\to +\infty} CM = +\infty$

Le coût moyen décroît de Q= $0^+$ jusqu'à Q=$k_o$, puis croît de Q = $k_o$ jusqu'à l'infini.
La représentation du coût moyen de courte période pour différentes valeurs du facteur fixe *K* est la suivante :




$\mathbf{CM_{LP} = Cm_{LP} = 4}$

**3. Lorsque $k_o$ = 10 les fonctions de coût sont à court terme les suivantes :**
- Coût total :

$$CT(Q) = 20 + \frac{Q^2}{5}$$

-Coût marginal

$$Cm(Q) = \frac{2}{5}Q$$

- Coût moyen :

$$CM(Q) = \frac{20}{Q} + \frac{Q}{5}$$

**4. Déterminons maintenant la fonction de coût total de longue période.** Une méthode classique de résolution consiste à minimiser le coût sous contrainte d'un certain niveau de production

$$\begin{cases} Min\ CT = k.P_k + l.P_l \\ S/c\ \ Q_0 = Q \end{cases}$$

La fonction de Lagrange s'écrit :

$$L(k, l, \lambda) = CT + \lambda.(Q_0 - k.P_k - l.P_l)$$

$$L = k.P_k + l.P_l + \lambda.(Q_0 - 2k^{1/2}l^{1/2})$$

Les conditions de 1^er^ ordre sont :

$$\begin{cases} L'_k = 0 \\ L'_l = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_k - \lambda.k^{-1/2}l^{1/2} = 0 \\ P_l - \lambda.k^{1/2}l^{-1/2} = 0 \\ Q_0 - 2k^{1/2}l^{1/2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = P_k.\left[\frac{k}{l}\right]^{1/2} \ldots.(1) \\ \lambda = P_l.\left[\frac{l}{k}\right]^{1/2} \ldots.(2) \\ Q_0 = 2k^{1/2}l^{1/2} \ldots.(3) \end{cases}$$

Des équations (1) et (2), nous obtenons l'égalité suivante : $\frac{k}{l} = \frac{P_l}{P_k}$

D'où: $k = \frac{P_l}{P_k} l$ (4)

L’égalité (4) correspond à l'équation du sentier d'expansion de la firme. En remplaçant (4) dans l'équation (3), on obtient :

$$Q_0 = 2.\left[\frac{P_l}{P_k} l\right]^{1/2}.l^{1/2} = 2.\left[\frac{P_l}{P_k}\right]^{1/2}.l$$

D’où

$l^* = \left[\frac{P_k}{4P_l}\right]^{1/2}.Q_0$ et $k^* = \frac{P_l\left[\left[\frac{P_k}{4P_l}\right]^{1/2}.Q_0\right]}{P_k} = \left[\frac{P_l}{4P_k}\right]^{1/2}.Q_0$

Nous venons d'obtenir les coordonnées optimales : les valeurs $L^*$ et $K^*$ correspondent donc aux quantités de facteurs *l* et *k* qui minimisent le coût total de fabrication, pour une quantité $Q_0$ donnée.

Grâce à l* et à k*, il est facile de « reconstituer » le coût total ; en effet, il suffit de remplacer l et k par l* et k* dans la fonction de coût initiale :

On aura par conséquent :

$$CT^* = P_k.\left[\frac{P_l}{4P_k}\right]^{1/2}.Q_0 + P_l.\left[\frac{P_k}{4P_l}\right]^{1/2}.Q_0$$

La valeur CT* ci-dessus indique le coût total optimal pour une production $Q_0$ donnée. Or, la fonction de coût total, par définition, nous donne le coût total optimal pour une infinité de niveaux de production. De ce fait, pour obtenir le coût total de longue période, il suffit d'exprimer CT en fonction de Q ; après simplification, on obtient :

$$CT\ (Q) = Q.[P_k.P_l]^{1/2}$$

**5. La fonction de coût total de longue période est une droite passant par l'origine et d'équation :**

$CT\ (Q) = \alpha.Q$ avec $\alpha = [P_k.P_l]^{1/2} > 0$

Ainsi, l'accroissement du coût est proportionnel à l'accroissement de la production. Cette usine ne connaît ni économies, ni déséconomies d'échelle : on dit qu'elle connaît des rendements d'échelle constants. Ce résultat est dû à la forme particulière de la fonction de production (type Cobb-Douglas, homogène de degré 1). À long terme, l'accroissement de la production est parfaitement proportionnel à l'accroissement du volume des facteurs.

Les fonctions de coût moyen et coût marginal, de longue période, s'obtiennent facilement :

$$Cm(Q) = CM(Q) = \alpha$$

Lorsque les prix des facteurs sont $P_K = 2$ et $P_L = 8$, on a :

$$Cm(Q) = CM(Q) = 4$$

On retrouve la valeur minimale prise par toutes les courbes de coût moyen de courte période (***graphique supra***). Ainsi, la courbe de coût moyen de longue période est bien tangente aux courbes de coût moyen de courte période.

**6.** Le producteur rationnel qui souhaite maximiser son profit va produire une quantité Q" telle que l'égalité suivante soit vérifiée : Cm(Q") = Prix du marché.

Or, nous venons de constater que le coût marginal est une constante. La difficulté vient du fait que le prix est une donnée pour l'entreprise (elle ne peut pas l'influencer). Ainsi, ces deux constantes que sont le prix et le coût marginal, ne seront pas égales. Il est donc possible d'envisager 3 solutions :

- **Le prix du marché est supérieur au coût marginal :** le producteur bénéficie d'une marge positive sur chaque unité vendue. Son objectif sera donc de vendre le plus possible. Mathématiquement, il n'y a pas de profit maximum. Sur le plan pratique, les acheteurs étant généralement limités en nombre, le profit sera maximum lorsque le producteur se sera accaparé la totalité du marché,
- **Le prix du marché est égal au coût marginal** : le profit est nul quel que soit le volume produit,
- **Le prix du marché est inférieur au coût marginal** : le producteur subit une marge négative sur chaque unité vendue.

---

**Troisième partie : Répondez par Vrai ou Faux aux questions ci-dessous.**

---

**1. Le coût moyen est minimum quand le coût marginal est minimum.**

VRAI

FAUX

**Réponse : FAUX**

**2. Le coût moyen est plus élevé à long terme qu'à court terme.**

VRAI

FAUX

**Réponse : FAUX**

**3. Si les rendements marginaux d'une firme sont décroissants, les rendements d'échelle le sont aussi.**

VRAI

FAUX

**Réponse : FAUX**

**4. Si les rendements d'échelle sont croissants, les productivités marginales des facteurs sont obligatoirement croissantes.**

VRAI

FAUX

**Réponse : FAUX**