Série de TD N° 1 d'Algèbre 1

Exercice 1. **1.** Soient P, Q et R des propositions. En utilisant la table de vérité, montrer que les propositions suivantes sont des tautologies.

a) $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$, **b)** $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$, **c)** $(\overline{P \Longrightarrow Q}) \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$,
d) $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire en termes de quantificateurs logiques, les propositions suivantes:

a) f est bornée. **b)** f est paire. **c)** f ne s'annule jamais. **d)** f n'est pas la fonction nulle.
e) f est strictement croissante.

Exercice 2. **1.** Soient P, Q et R trois propositions. Sans utiliser la table de vérité montrer que la proposition $(P \Longrightarrow Q) \wedge (P \wedge \overline{Q}) \Longrightarrow R$ est vraie.

2. Dire si la proposition suivante et vraie ou fausse puis donner sa négation et sa contraposée
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, xyz = 0 \Longrightarrow [(x = 0) \vee (y = 0 \wedge z = 0)]$.

3. Pour quelles valeurs de x les propositions suivantes sont fausses?

a) $(x = 3) \Longrightarrow (x = 0)$, **b)**$(x = 1$ et $x > 2) \Longrightarrow (x > 3)$.

4. Décrire les parties de $\mathbb{R}$ pour que les propositions suivantes soient vraies.

a) $[(x = 0) \wedge (x > 1)] \Longrightarrow (x > 3)$, **b)** $[(x = 1) \wedge (x > 5)] \vee (x > 2)$, **c)** $(x^2 \geq 0) \Longrightarrow (x > 4)$.
d) $[(x < 1) \vee (x > 0)] \Longrightarrow x^2 = -1$.

Exercice 3. **1.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Ecrire leurs négations.

a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$, **b)** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$, **c)** $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
d)$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$, **e)** $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1 \neq 0$ ou $x + 2 \neq 0)$,
f) $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$, **g)** $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \big((x \leq y) \Longleftrightarrow (x^2 \leq y^2)\big)$.

Exercice 4. Soient n un entier naturel et x, y des réels. Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer.

(1) n premier $\Longrightarrow (n = 2$ ou n impair$)$, **(2)** $(xy \neq 0) \Longrightarrow (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$
(3) $(x \neq y) \Longrightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$.

Exercice 5. Montrer que:

1) La racine carrée d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.
2) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ n'est ni paire ni impaire.
3) Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$, si $a + b$ est irrationnel alors a ou b sont irrationnels.
4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.
5) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.