3 Exercices et corrigés

3.1 Exercices

Exercice 1 : Dans une certaine population, la probabilité qu'une personne porte des lunettes est $p = 0.01$. On constitue dans cette population un échantillon de n individus et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes portant des lunettes. On suppose que $n = 10$.

1. Quelle est la loi de X ?
   Déduire sa moyenne, sa variance et son écart type.
2. Calculer les probabilités :
   (a) que trois personnes portent des lunettes.
   (b) qu'au moins deux personnes portent des lunettes.

Exercice 2 : Un laboratoire pharmaceutique affirme que son nouveau vaccin contre le Covid-19 est efficace à 94%.
Soit X une variable aléatoire comptant le nombre de personnes vulnérables (non immunisés) au virus dans une population de 60 individus ayant été déjà vaccinés.

1. X suit quelle loi de probabilité ?
2. Par quelle loi, on peut approcher cette loi de probabilité ?
3. Calculer la probabilité qu'il y ait 5 personnes vulnérables au virus ?

Exercice 3 : Dans une certaine population, la probabilité qu'une personne porte une montre est $p = 0,01$. On constitue, dans cette population, un échantillon de n individus et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes portant des montres.

1. On suppose que $n = 10$.
   (a) Quelle loi suit X ? Déduire la moyenne et la variance de X.
   (b) Calculer la probabilité que 3 personnes portent une montre.
2. On considère le cas $n = 100$.
   (a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins 2 personnes portent une montre.
3. Dans considère le cas où $n = 1000$.
   (a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins 2 personnes portent une montre.

Exercice 4 : Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont premier prix, et les autres sont haut de gamme. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas premier prix vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $m = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leq X \leq 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas premier prix qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0.05. On ne réalimente pas le stock en cours de mois. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Exercice 5 : Un tremblement de terre majeur se produit une fois par 150 ans dans un certain pays. Soit X une variable aléatoire donnant le temps d'attente en année avant un nouveau tremblement de terre.

1. Quelle est la de probabilité de X. Déduire son espérance mathématique, sa variance et son écart type.
2. Donner sa fonction de répartition.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait un tremblement de terre majeur dans les prochaines 30 années ?

Exercice 6 : Une montre digitale a une durée de vie moyenne de 100000 heures. Quelle est la probabilité qu'elle ne fonctionne plus après 5 ans ?

3.2 Corrigés

Exercice 1 : La probabilité qu'une personne porte des lunettes est $p = 0.01$.
La probabilité qu'une personne ne porte pas des lunettes est

$$q = 1 - p = 1 - 0.01 = 0.99.$$

X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes portant des lunettes parmi les 10 personnes.

1. X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.01 \rightsquigarrow \mathcal{B}(10, 0.01)$.
   La loi de probabilité de X est :

$$p(X = k) = C_{10}^{k}.(0.01)^{k}.(0.99)^{(10-k)},$$

avec $C_{10}^k = \frac{10!}{(10-k)!k!}$.

(a) $E(X) = n.p = 10 \times 0.01 = 0.1$;

(b) $V(X) = n.p.q = 10 \times 0.01 \times 0.99 = 0.099$;

(c) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.099} = 0.3146$.

2. Calcul des probabilités $P(X = 3)$ et $P(X \geq 2)$:

(a) $P(X = 3) = C_{10}^3.(0.01)^3.(0.99)^{(7)} = 0.00011184$.

(b) l'événement "au moins deux personnes portent des lunettes" est l'événement opposé à "moins de deux personnes portent de lunettes". La probabilité $P(X \geq 2)$ se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - \Big[P(X = 0) + P(X = 1)\Big] \\ &= 1 - \Big[\Big(C_{10}^0.(0.01)^0.(0.99)^{(10)}\Big) + \Big(C_{10}^1.(0.01)^1.(0.99)^{(9)}\Big)\Big] \\ &= 1 - 0.9957379 = 0.00426. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Un laboratoire pharmaceutique affirme que son nouveau vaccin contre le Covid-19 est efficace à 94%.

X : v.a. comptant le nombre de personnes vulnérables au virus dans une population de 60 individus ayant été déjà vaccinés.

1. X suit une loi Binomiale de paramètres : $n = 60$ et $p = 1 - 0.94 = 0.06$, car les résultats d'une épreuve est indépendant des résultats des autres épreuves (une personne vacciné peut être vulnérable ou non indépendamment des autres personnes) et pour chaque épreuve, il y a deux résultats possibles (être vulnérable au vaccin ou non).

   La loi de probabilité de cette loi Binomiale est :

$$p(X = k) = C_{60}^k.(0.06)^k.(0.94)^{(60-k)}.$$

   Avec

   (a) $E(X) = n.p = 60 \times 0.06 = 3.6$;

   (b) $V(X) = n.p.q = 60 \times 0.06 \times 0.94 = 3.384$;

   (c) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3.384} = 1.839$.

2. Cette loi Binomiale $B(60, 0.06)$ est approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 3.6$, vu qu'elle vérifie toutes les conditions d'approximation par la loi de Poisson :

$$\begin{cases} n = 60 > 25, \\ p < 0.1, \\ E(X) = np = 3.6 < 5. \end{cases}$$

$$\text{Loi Binomiale } B(60, 0.06) \rightsquigarrow \text{Loi de Poisson } P(3.6) : \quad P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \text{avec } \lambda = 3.6$$

3. Calcul de la probabilité qu'il y ait 5 personnes vulnérables au virus :

$$P(X=5) = \frac{(3.6)^5}{5!}e^{-(3.6)} = 0.13768.$$

Exercice 3 : X : variable aléatoire comptant le nombre de personnes portant des montres.
n : nombre de personnes.
La probabilité qu'une personne porte une montre est $p = 0.01$.
La probabilité qu'une personne ne porte pas une montre est

$$q = 1 - p = 1 - 0.01 = 0.99.$$

1. Pour $n = 10$.
   (a) la v.a. X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.01$, sa loi de probabilité est :
   $$P(X=k) = C_{10}^k (0.01)^k (0.99)^{10-k}.$$
      i. $E(X) = np = 10 \times 0.01 = 0.1$.
      ii. $V(X) = npq = 10 \times 0.01 \times 0.99 = 0.099$.
   (b) La probabilité que 3 personnes portent une montre est :
   $$P(X=3) = C_{10}^3 (0.01)^3 (0.99)^{10-3} = 120(0.01)^3(0.99)^7 = 0.00011184.$$
2. Pour $n = 100$, la v.a. X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0.01$ avec une espérance mathématique $E(X) = np = 100 \times 0.01 = 1$.
   (a) Vu que $n = 100 > 25$ et $np = 1 < 5$, cette loi Binomiale est approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 1$:
   $$P(X=k) = \frac{e^{-1}1^k}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$
   (b) La probabilité qu'au moins deux personnes portent une montre :
   $$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \\ &= 1 - (e^{-1} + e^{-1}) = 0.2642. \end{aligned}$$

3. Pour $n = 1000$, la v.a. X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0.01$ avec :

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 1000 \times 0.01 = 10. \\ V(X) &= npq = 1000 \times 0.01 \times 0.99 = 9.9. \end{aligned}$$

   (a) Vu que $n = 1000 > 25$, $E(X) = np = 10 > 5$ et $nq = 990 > 5$, cette loi Binomiale est approchée par une loi Normale $N(m, \sigma)$, tel que

$$\begin{aligned} m &= np = 10. \\ \sigma &= \sqrt{npq} = \sqrt{9.9} = 3.1464. \end{aligned}$$

$$p(X = k) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{k-m}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{(3.1464)\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{k-10}{(3.1464)}\right)^2}.$$

   (b) La probabilité qu'au moins deux personnes portent une montre :

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(\frac{X-10}{3.1464} < \frac{2-10}{3.1464}) \\ &= 1 - P(Y < -2.54258) = 1 - F_Y(-2.54258) \\ &= 1 - \Big(1 - F_Y(2.54258)\Big) = F_Y(2.54258) \simeq 0.9945. \end{aligned}$$

   où la valeur de $F_Y(-2.54258)$ est déduite à partir de la table de la loi Normale centrée réduite $Y : N(0, 1)$.

Exercice 4 : La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $m = 750$ et $\sigma = 25$ de densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{25\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-750}{25}\right)^2}.$$

1. Calcul de $P(725 \leq X \leq 775)$:

$$\begin{aligned} P(725 \leq X \leq 775 &= P\Big(\frac{725-750}{25} \leq \frac{X-750}{25} \leq \frac{775-750}{25}\Big) \\ &= P(-1 \leq \frac{X-750}{25} \leq 1) = P(-1 \leq Y \leq 1) = F_Y(1) - F_Y(-1) \\ &= F_Y(1) - \Big(1 - F_Y(1)\Big) = 2F_Y(1) - 1 \\ &= (2 \times 0.8413) - 1 = 0.6826. \end{aligned}$$

   où la valeur de $F_Y(1)$ est déduite à partir de la table de la loi Normale centrée réduite $Y : N(0, 1)$.

2. La plus petite valeur de l'entier n remplissant la condition $P(X > n) = 0.05$, corresponds aussi à :

$$P(X \leq n) = 1 - 0.05 = 0.95.$$

Or

$$\begin{aligned} P(X \leq n) &= P\Big(\frac{X - 750}{25} \leq \frac{n - 750}{25}\Big) = P\Big(Y \leq \frac{n - 750}{25}\Big) \\ &= F_Y\Big(\frac{n - 750}{25}\Big). \end{aligned}$$

Du tableau de la loi normale centrée réduite $N(0;1)$, la valeur de $\frac{n-750}{25}$, correspondant à

$$F_Y\Big(\frac{n - 750}{25}\Big) = 0.95$$

est $\frac{n-750}{25} \simeq 1.65$, donc $n \simeq (1.65 \times 25) + 750 \simeq 791.25$.
On choisira pour valeur de n le premier entier qui suit 791.25, qu'est donné ci-dessous :

$$n = 792.$$

Exercice 5 : La variable aléatoire X donne le temps d'attente en année avant un premier événement. Comme il y a en moyenne un tremblement de terre par 150 ans il y a $\frac{1}{150}$ tremblements de terre en moyenne par année.

1. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{150}$ et de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{150}x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$E(X) = 150,\ V(X) = (150)^2 \text{ et } \sigma(X) = 150.$$

2. La fonction de répartition de X est :

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{150}x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3. La probabilité qu'il y ait un tremblement de terre majeur dans les prochaines 30 années est :

$$P(X < 30) = 1 - e^{-\frac{1}{150}30} = 0.18127.$$

Exercice 6 : Posons X la variable aléatoire qui donne la durée de vie en années de cette montre digitale. Sachant que, une année de 365.25 jours corresponds à 8766 heures, alors cette durée de vie moyenne (espérance de vie) de 100000 heures, de cette montre, corresponds à

$$E(X) = \frac{100000}{8766} = 11.4077 \text{ années.}$$

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{11.4077}$ et de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{11.408}x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La probabilité que cette montre digitale ne fonctionne plus après 5 ans est :

$$P(X \leq 5) = 1 - e^{-\frac{5}{11.4077}} = 0.3548.$$