3 Autres lois de probabilité continues

3.1 La loi Log-Normale de Galton

Définition (la loi Log-Normale)

La loi log-normale de Galton d'une v. a. X *continue de paramètres* μ *et* σ *est définie par sa densité de probabilité :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]; \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*,\ x > 0.$$

Où $E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$; $var(X) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)$.

Explication

Si X suit la loi log-normale de paramètresμ et σ, la v. a. $Y = \ln(X)$ suit la loi normale $N(\mu, \sigma)$. Quand on utilise une loi de Galton, les calculs pratiques sont faits avec la v. a. $\ln(X)$ qui suit une loi normale. La loi log-normale trouve ses applications en géologie.

3.2 La loi du Khi-deux à n degrés de liberté $\left(\chi_n^2\right)$

Cette loi joue un rôle important dans les tests statistiques.

On obtient une valeur χ_n^2 en additionnant des nombres au carré, donc cette valeur ne peut pat être négative.

L'aspect de la courbe d'une distribution χ_n^2 variera selon le nombre de degrés n qui est le seul paramètre de cette distribution.

Définition

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v. a. indépendantes telles que $X_i \tilde{} N(0,1) \quad \forall i$. Alors :

$$X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2 \tilde{} \chi_n^2.$$

Remarque

La fonction densité de probabilité de χ_n^2 est :

$$f_{\chi_n^2}(t) = c_n t^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(\frac{-t}{2}\right),$$

où c_n sont telles que :

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\chi_n^2}(t)\, dt = 1.$$

Si $n > 2$ alors le mode$= n-2$ (mode =valeur pour laquelle la courbe atteint son maximum).

Propriétés

Si $X \tilde{} \chi_n^2$ (mode$= n-2,\ n > 2$) alors $E(X) = n,\ var(X) = 2n$.

3.3 Convergence de la loi χ_n^2 vers la loi normale (approximation)

Soit $X \tilde{} \chi_n^2$, alors $\frac{X-n}{\sqrt{2n}} \longrightarrow N(0,1)$, quand $n \longrightarrow \infty$.

Ou bien : $\chi_n^2 \approx N\left(n, \sqrt{2n}\right),\ n \longrightarrow \infty$. En pratique $n > 30$.

3.4 La loi de Fisher-Snedecor $(F(n_1, n_2))$

Définition

Soient $Y_1\tilde{}\chi^2_{n_1}$ et $Y_2\tilde{}\chi^2_{n_2}$, deux v.a. indépendantes. Alors

$$F = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2}\tilde{}F(n_1, n_2) \text{ (loi de Fischer-Snedecor à } n_1 \text{ et } n_2 \text{ degrés de liberté)}$$

Remarque

La fonction densité de probabilité de $F(n_1, n_2)$ est :

$$f_F(t) = c_{n_1,n_2} t^{\frac{n_1}{2}-1} (n_1 t + n_2)^{-\frac{(n_1+n_2)}{2}}, \ t > 0.$$

Propriétés

Si $F\tilde{}F(n_1, n_2)$, alors $E(F) = \frac{n_1}{n_2-2}, n_2 > 2$ et $var(F) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}; \ n_2 > 4.$

3.5 La loi de Student à n degrés de liberté (T_n)

Elle joue un rôle important dans l'estimation par intervalle de confiance. Elle est symétrique, de moyenne nulle et dépend d'un paramètre n appelé nombre de degrés de liberté.

L'aspect de la courbe variera selon le nombre de degrés de liberté n (de façon générale, elle est plus aplatie que $N(0,1)$ et quand n augmente $(n > 30)$ les deux courbes se confondent).

Définition

Soit $X\tilde{}N(0,1)$, $Y\tilde{}\chi^2_n$ v. a. indépendantes. Alors :

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}\tilde{}T_n.$$

Remarque

La fonction densité de probabilité de T_n est :

$$f_{t_n}(t) = c_n \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} ;$$

où c_n sont tels que : $\int\limits_{\mathbb{R}} f_{t_n}(t)\,dt = 1.$

Propriétés

Si $X\tilde{\ }T_n$, alors : $E(X) = 0,\ n > 1$ et $var(X) = \frac{n}{n-2}, n > 2.$

3.6 Convergence de la loi de Student vers la loi normale (approximation)

Soit $X\tilde{\ }T_n$ alors : $X \longrightarrow N(0,1)$ quand $n \longrightarrow \infty$. En pratique $n > 30$.