Chapitre 2

Résolution des systèmes d'équations linéaires

En ingénierie, les systèmes d'équations algébriques jouent un rôle très important et grâce à l'informatique et l'analyse numérique, on arrive à aborder des problèmes de taille prodigieuse.

1. Systèmes linéaires

En général, la résolution d'un système d'équations linéaires consiste à trouver un vecteur $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, \ldots x_n]^T$ solution de :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

qui s'écrit sous la notation matricielle suivante : $A\vec{x} = \vec{b}$ où ; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, A et $\vec{b}$ sont connus.

1.1 Méthodes de résolution directes :

1.1.1. Méthode de la matrice inverse : soit un système linéaire à n inconnues, $A * x = b \ldots\ldots (1)$

Si A est un matrice non singulière (inversible ou régulière, c'est-à-dire $\det(A) \neq 0$), alors on multiplie (1) par A^{-1} tel que ;

$$A^{-1} * A * x = A^{-1} * b \Leftrightarrow I_n * x = A^{-1} * b \Leftrightarrow x = A^{-1} * b$$

Avec : I_n est la matrice unité ou matrice identité $\begin{cases} \delta_{ij} = 1 \; si \; i = j \\ \delta_{ij} = 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * C^t$

où C^t est la comatrice transposée de A.

$$(c_{ij}) = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ et } \det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} * a_{ij} * \det(A_{ij})$$

Avec A_{ij} est la matrice A sans la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Exemple :

Résoudre le système $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le déterminant de A : $\det(A) = 6 * \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 4 * \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

La comatrice C :

$$C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 18 \\ 6 & 6 & -12 \\ -14 & -6 & 24 \end{pmatrix}$$

La comatrice transposée : $C^t = \begin{pmatrix} -8 & 6 & -14 \\ -6 & 6 & -6 \\ 18 & -12 & 24 \end{pmatrix}$

La résolution : $x = \frac{1}{12} * \begin{pmatrix} -8 & 6 & -14 \\ -6 & 6 & -6 \\ 18 & -12 & 24 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.1.2. **Méthode de CRAMER :**

L'unique solution du système $A * x = b$ avec A une matrice non singulière ($\det(A) \neq 0$) est donnée par :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

où A_i est la matrice A où l'on a remplacé la $i^{ème}$ colonne par le vecteur second membre « b ». Cette méthode est inadaptée pour résoudre les systèmes de grandes tailles vu qu'il y a trop de déterminants à calculer.

Exemple : reprenant l'exemple précédent : $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 12 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{12} = 1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{12} = 2, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{12} = -1$$

1.1.3. Méthode d'éliminations de GAUSS

Soit à résoudre le système d'équations linéaires $A * x = b$ ... ... $(*)$.

La méthode d'éliminations de Gauss consiste à éliminer tout les termes sous la diagonale de la matrice A, elle est aussi appelée du pivot de Gauss ou de triangularisation de Gauss.

On introduit la notion de la matrice augmentée du système (*) qui est la matrice de dimensions $n \times (n+1)$ obtenue en ajoutant le vecteur second membre (b) à la matrice A telle que :

$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$ puisque les opérations élémentaires doivent être effectuées à la fois sur les lignes de A et sur celles d vecteur $\vec{b}$.

On considère le système suivant de trois équations à trois inconnues x_1, x_2 et x_3 pour illustrer la méthode de Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A * x = b$$

on commence par écrire la matrice augmentée (dans cet exemple, aucun des pivots n'est nul et tous les éléments de A sont de même ordre de grandeur)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

✓ Etape 1 : on élimine les éléments de première colonne a_{21} et a_{31} au dessous du pivot a_{11} comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 \end{array} \text{ on aura } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -5 \end{array}\right) \text{ telle que } L : \text{ligne}$$

La ligne (1) est ligne pivot et a_{11} est le pivot. ($a_{11} = 2$, $a_{21} = 1$, $a_{31} = 3$)

✓ Etape 2 : on élimine les éléments de la deuxième colonne au dessous de la diagonale (i>2) comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} L_2 \end{array} \text{ et on aura } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{16}{3} \end{array}\right)$$

La ligne (2) est la nouvelle ligne pivot et $a_{22} = \frac{3}{2}$ est le pivot.

La forme de la dernière écriture matricielle nous permet de résoudre facilement le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -\frac{8}{3}x_3 = -\frac{16}{3} \end{cases} \text{ et après résolution par substitution, on aura } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Remarque : Si on réduit les éléments de la diagonale en 1 et élimine les éléments supérieurs à la diagonale principale, on aura la méthode de JORDAN. On peut le voir sur l'exemple choisi à partir de l'étape 2.

On a $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -5 \end{array}\right)$, on réduit le pivot a_{11} et a_{22} à 1, donc on divise la ligne 1 sur 2 et la ligne 2 sur $\frac{3}{2}$ et on élimine les éléments de la colonne 2 pour $i \neq 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{array} \quad \text{on aura :} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{16}{3} \end{array}\right)$$

, on réduit a_{33} à 1 en divisant la ligne 3 par $-\frac{8}{3}$ et on élimine les éléments de la colonne 3 pour $i \neq 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_3 \end{array} \quad \text{on aura :} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Résolution : Le vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ est égal au second membre de la dernière étape : $x = (1,0,2)$.

Eliminations de Gauss avec pivot partiel :

Il se peut lors de l'élimination de Gauss que le pivot soit nul ou presque, alors on applique le pivot partiel qui consiste à choisir comme ligne de pivot celle parmi les restantes qui a l'élément le plus grand en valeur absolue de la i$^{\text{ème}}$ colonne et on permute cette ligne qui réalise le maximum et celle à pivot nul.

Exemple :

Soit le système $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$ dont la solution est (1,2,3).

Le système est régulier ($det \neq 0$), en appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{array}\right) \quad avec \left(\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right)$$

$a_{22} = 0$, alors on ne peut pas aborder l'étape 2. On cherche alors le pivot maximum suivant la colonne 2 pour $i \geq 2$.

On a $|a_{32}|$ est max, donc on permute les lignes 2 et 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$ et on continue le calcul.

- Si on devait chercher le pivot maximal suivant la ligne 2, on aurait inter-changé comme suit : on a $|a_{23}| = max$ pour $j \geq 2$, donc on permute les colonnes 2 et 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -15 \\ 0 & -3 & -1 & -11 \end{array}\right)$$ mais attention !! Dans ce cas le vecteur inconnu varie dans la succession de ses éléments, au départ $x = (x_1, x_2, x_3)$ et la permutation donnera lieu à $x = (x_1, x_3, x_2)$. L'étape suivante donnera :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow x = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Calcul de la matrice inverse par la méthode de Gauss :

$A * A^{-1} = I$ (I : matrice identité)

Pour faire le calcul, on écrit la matrice augmentée comme suit : $(A|\,I)$ et on effectue les opérations de Jordan pour cette dernière. On aura le résultat comme suit : $(I|A^{-1})$.

Exemple : on calcul la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2/(-8) \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3/(-1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (I|A^{-1}).$$

1.1.4. **Méthode de décomposition L.U**

Si A est une matrice carrée d'ordre (n) dont toutes les sous matrices principales sont régulières, alors il existe une décomposition de A sous la forme $A = L * U$ telle que :

L : matrice triangulaire inférieure avec une diagonale unitaire.

U : matrice triangulaire supérieure.

La résolution du système :

$$A.x = b \Leftrightarrow L.U.x = b \Leftrightarrow \begin{cases} L.Y = b \\ U.x = Y \end{cases}$$

Exemple : soit à résoudre le système : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A * x = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[A_1] = [2],\ \det([A_1]) = 2 \neq 0$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \det([A_2]) = 3 \neq 0$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \det([A_3]) = -8 \neq 0$$

Toutes les sous matrices principales de A sont régulières, A admet donc une décomposition unique $A = L.U$

On pose $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$

$$A = L.U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

On effectuant le produit des deux matrices, on aura :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$L.Y = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$U.x = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -\frac{16}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$