Série N°02

Exercice 1

Un point matériel M se déplace selon l'axe OX, son abscisse x est donnée à chaque instant par :

$$\boldsymbol{x(t) = -t^3 + 6t^2 + 1} \ (m)$$

1- Donner les expressions de la vitesse $\boldsymbol{v(t)}$ et de l'accélération $\boldsymbol{a(t)}$.

2- Déterminer l'instant $\boldsymbol{t_1}$ où le point M s'arrête .

3- Déterminer les intervalles de temps où Mse déplace vers les $\boldsymbol{x}$ positifs et ceux où il se déplace vers les $\boldsymbol{x}$ **négatifs**.

4- Déterminer les intervalles de temps durant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

5- Déterminer le déplacement ainsi que la distance parcourue entre les instants $\boldsymbol{t_0 = 0}$ et $\boldsymbol{t_2 = 5s}$.

Exercice 2

Les coordonnées cartésiennes d'un mobile M se déplaçant dans le plan OXY sont :

$$\boldsymbol{x(t)} = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right), \boldsymbol{y(t)} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

1- Déterminer l'équation de la trajectoire. Quelle est sa nature?

2- Ecrire les expressions des vecteurs vitesse et accélération ;

3- Trouver les expressions des accélérations normale et tangentielle. Quelle est la nature du mouvement ?

Exercice 3

Dans un plan OXY , une particule M est repérée à tout instant par ses coordonnées polaires $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta})$ telles que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho(t) = b\cos\omega t} \\ \boldsymbol{\theta(t) = \omega t} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{\omega}$ sont des constantes positives.

1- Dans la base locale $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta})$ associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteursposition, vitesse et accélération de la particule M.

2- Toujours dans la même base, déterminer puis représenter les vecteurs position, vitesse et accélération aux instants $\boldsymbol{t_1 = 0s}$ et $\boldsymbol{t_2 = \frac{\pi}{3\omega}s}$.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, les coordonnés cartésiennes, en fonction du temps$t$, d'un mobile M, assimilé à un point matériel, sont :

$$x(t) = 2\cos(3t) \ ; y(t) = 2\sin(3t) \ ; z(t) = -5t$$

1. Quelle la nature de la trajectoire de M dans la plan (OXY) ? Quelle est la nature de la trajectoire de M suivant l'axe (OZ) ? Conclure. Représenter la trajectoire de M en indiquant le sens de déplacement.
2. Donner les coordonnées cylindriques(ρ,θ,z) de$M$.
3. Dans la base des coordonnées cylindriques, donner le vecteur position et déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs normes.

Exercice 5

Un nageur plonge d'un point situé sur la rive d'un fleuve et veut atteindre l'autre rive. Pour cela, il nage perpendiculairement au courant avec une vitesse ne vitesse $\overrightarrow{v_1}$. Sa vitesse par rapport à la terre est $\overrightarrow{v_3}$ et la vitesse du vent est $\overrightarrow{v_2}$.

1- Identifier chacune des vitesses $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ aux vitesses, absolue $\overrightarrow{v_a}$, relative $\overrightarrow{v_r}$ et d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$.

2- Calculer la vitesse du nageur par rapport à la terre (module et direction). Faites un schéma.

3- a- suivant quelle direction le nageur doit-il s'orienté pour qu'il se déplace en ligne droite et perpendiculaire à la rive à la vitesse constante $\overrightarrow{v_3}$. Faites un schéma.

b- quelle est alors la vitesse du nageur par rapport à la terre.

A.N. v_1=4m/s, v_2=3m/s

Exercices supplémentaires:

Exercice s1

Une particule P se déplace le long de l'axe x avec l'accélération a donné par :
$a = 6t - 4$ ms^{-2}
Initialement P est au point x_0= 20 m et se déplace à une vitesse de v_0= 15 ms^{-1} dans **le sens négatif** de x.

1- Trouver la vitesse et le déplacement de P à l'instant t.
2- Trouvez le temps et la position de la particule au moment ou elle devienne immobile.

Exercice s2

Un point matériel M est animé d'un mouvement défini par les équations :

$x = v_1 t$
$y = -ct^2 + v_2 t + y_0$ Où v_1, v_2, c et $y_0$sont des constantes positives.

1- Trouver l'équation de la trajectoire de M.
2- Trouver les composantes cartésiennes du vecteur vitesse et déduire son module.
3- a- Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération et déduire son module. Quelles sont les phases du mouvement.

b- Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération. Déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

3- Trouver le temps au sommet S de la trajectoire et établir les coordonnées x_s et y_s.

Exercice s3

Dans un repère $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le vecteur accélération d'un mobile M est $\vec{a} = -5\vec{\jmath}$. A l'instant t=0, $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{v_0} = 5\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}$

1- Trouver les expressions des vecteurs de vitesse et de position à l'instant t quelconque.
2- Quelle est l'équation de la trajectoire.
3- Déterminer les accélérations tangentielle a_T et normal a_N et déduire le rayon de courbure de la trajectoire. A quel instant la composante tangentielle de l'accélération est-elle nulle.

Exercice s4

Dans un plan OXY, une particule M est repérée à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ, θ) telles que : $\begin{cases} \rho(t) = 1 \\ \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$ où α et une constante positive.

1- Trouver l'expression de l'équation de la trajectoire de M en coordonnées cartésiennes. Déduire sa nature.
2- Dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule M. Déduire leurs modules
3- Calculer l'abscisse curviligne s(t) de M sachant qu'à l'instant t=0s, s(0)=0

Exercice s5

L'abscisse curviligne d'un point matériel décrivant un cercle de rayon R est $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt,$ a et b étant des constantes.

1. Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération.
2. Quel est l'angle θ balayé par le point matériel au cours du temps sachant qu'à $t = 0, \theta = 0$.

Exercice s6

Un bateau prend la mer en direction du nord - 60° - ouest à la vitesse de 4 km/h par rapport à l'eau. Le mouvement du bateau par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l'ouest à la vitesse de 5 km/h.

1. Identifier le repère fixe $(\mathcal{R})$, le repère mobile $(\mathcal{R}')$ et le mobile M, ainsi que les vitesses : absolue $\overrightarrow{\boldsymbol{v_a}}$, relative $\overrightarrow{\boldsymbol{v_r}}$ et d'entrainement $\overrightarrow{\boldsymbol{v_e}}$;

2. Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau.

Exercice 1

$$x(t) = -t^3 + 6t^2 + 1 \ \ \text{(m)}$$

1. Expression de la vitesse $v(t)$: $v(t) = -3t^2 + 12t$

Expression de l'accélération $a(t)$: $a(t) = -6t + 12$

2. Instant d'arrêt :

$$v = 0 \Rightarrow -3t(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 & \text{début du mouvement} \\ t = 4\,s & \textit{instant d'arrêt} \end{cases}$$

3. Dans l'intervalle $[0,4[$, $v > 0$; M se déplace vers les x positifs.

   Dans l'intervalle $]4,\infty[$; , $v < 0$; M se déplace vers les x négatifs.

4. Dans les intervalles $[0,2[$ et $]4,\infty[$, $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{v} > 0$ le mouvement est accéléré.

   Dans l'intervalle $]2,4[$; $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{v} < 0$ le mouvement est retardé.

5. $x(0) = 1\,m; x(4) = 33\,m$; $x(5) = 26\,m$

   Déplacement effectué entre t0 et t2. $\Delta x = x(5) - x(0) = 25\,m$

   Distance parcourue : $d = |x(5) - x(4)| + |x(4) - x(0)| = 39\,m$

Exercice 2

1. l'équation de la trajectoire : $x \quad + y \quad = 4$.

   Nature de la trajectoire : Cercle de rayon $R = 2$ et de centre $O(0,0)$.

2. Vecteur vitesse : $\vec{v} = -\sin\left(\frac{t}{2}\right)\vec{\imath} + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\vec{\jmath}$.

   Vecteur accélération : $\vec{a} = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\vec{\imath} + -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\vec{\jmath}$

3. Accélération tangentielle : $\|\vec{v}\| = 1$; $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$

   Accélération normale : $a_t = 0 \rightarrow a_n = a = \frac{1}{2}$.

   Nature du mouvement : circulaire uniforme.

4. Abscisse curviligne : $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt = dt \Rightarrow s = t$

5. Coordonnées polaires :

   $\rho = 2;\ \ \theta = \frac{t}{2}$

6. Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{e_\rho}$

   Vecteur vitesse : $\vec{v} = \overrightarrow{e_\theta}$

   Vecteur accélération : $\vec{a} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{e_\rho}$

Exercice 3

1- Vecteurs, position, vitesse et accélération

$$\rho = b\cos(\omega t), \quad \dot{\rho} = -b\omega\sin(\omega t), \quad \ddot{\rho} = -b\omega^2\cos(\omega t), \quad \theta = \omega t, \dot{\theta} = \omega, \quad \ddot{\theta} = 0$$

Vecteur position $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = b\cos(\omega t)\overrightarrow{e_\rho}$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} = b\omega\left(-\sin(\omega t)\overrightarrow{e_\rho} + \cos(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}\right)$

Vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} = -2b\omega^2\left(\cos(\omega t)\overrightarrow{e_\rho} + \sin(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}\right)$

2- Détermination et représentation des vecteurs, position, vitesse et accélération aux instants t=0s et $t = \pi/4\omega s$

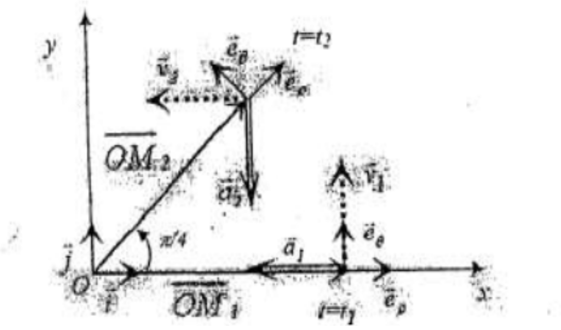
t(s)	Positions	Vitesses	Accélérations
t_1=0s	$\overrightarrow{OM_1} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = b\overrightarrow{e_\rho}$	$\vec{v}_1 = b\omega\overrightarrow{e_\theta}$	$\vec{a}_1 = -2b\omega^2 e_\rho$
t_2=π/4ω s	$\overrightarrow{OM_2} = b\sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\rho}$	$\vec{v}_2 = b\omega\left(-\sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\rho} + \sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\theta}\right)$	$\vec{a}_2 = -2b\omega^2\left(\sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\rho} + \sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\theta}\right)$

On a $\|\overrightarrow{OM_1}\| = b$ et $\|\overrightarrow{OM_2}\| = b\sqrt{2}/2$,

$\theta_1 = 0\,, \theta_2 = \pi/4$

$\|\overrightarrow{v_1}\| = \|\overrightarrow{v_2}\| = b$

$\|\overrightarrow{a_1}\| = \|\overrightarrow{a_2}\| = 2b\omega^{\,2}$



Exercice 04

1. Le mouvement dans le plan (OXY) :

$\begin{cases} x = 2\cos(3t) & (1) \\ y = 2\sin(3t) & (2) \end{cases} \rightarrow (1)^2 + (2)^2 = x^2 + y^2 = 2^2 \rightarrow$ un cercle de centre O(0,0) et de rayon R=2.

Le mouvement suivant l'axe (OZ) une translation rectiligne avec une vitesse constante. La trajectoire dans l'espace est une hélice.

2. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 2, tg\theta = \frac{y}{x} = tg(3t) \rightarrow \theta = 3t$.

Les coordonnés cylindriques de M :$\rho = 2\,; \theta = 3t\,; z(t) = -5t$

3. Vecteur position :$\vec{r} = 2\vec{e}_\rho - 5t\vec{k}$

$$\frac{d\theta}{dt} = 3\ ;\ \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta = 3\vec{e}_\theta\ ;\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\rho = -3\vec{e}_\rho$$

Vecteur vitesse :

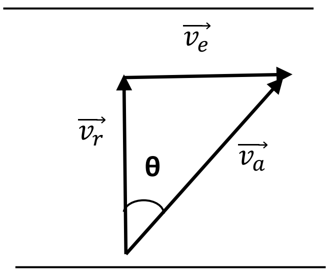
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} - 5\vec{k} = 6\vec{e}_\theta - 5\vec{k}\,;\quad v = \sqrt{61}$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -18\vec{e}_\rho\ ;\ a = 18$$

Exercice05

Exercice 10



1. Repère absolu : la rive

Repère relatif : le courant

Le mobile : le nageur

La vitesse du nageur par rapport au courant $\overrightarrow{v_1}$, est la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$

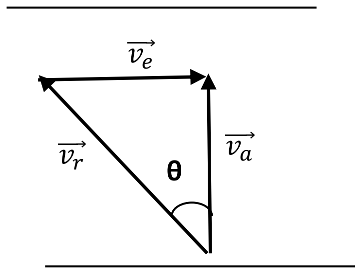
La vitesse du nageur par rapport à la rive $\overrightarrow{v_3}$, est la vitesse absolu $\overrightarrow{v_a}$

La vitesse du courant par rapport à la rive $\overrightarrow{v_2}$, la vitesse d'entrainement$\overrightarrow{v_e}$

2. $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} \rightarrow \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}$

$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_1^2} = 5m/s$

$$tg\theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = 37°$$



3. $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$

D'après le schéma on a $v_3 = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 2.64\ m/s$

$$sin\theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = 39°$$