Université A. Mira -Bejaia-
Faculté des Sciences de Gestions, commerciales et économiques
Département des Sciences économiques

Niveau : *L2* Année Universitaire 2020/2021

TD$_2$ de Statistiques Trois

Remarque 1. **Nous précisons que la solution est correcte (nous avons utilisé les anciennes tables statistiques), il faut juste refaire les calculs avec les valeurs affichés sur les tables statistiques. Pour l'examen nous allons utiliser les nouvelles tables que nous avons expliqué pendant les cours et TD. Bonne chance pour l'EMD.**

1 Énoncés

Exercice 1.

On mesure la force de compression d'un ciment en moulant de petits cylindres et en mesurant la pression X (exprimée en kg/cm^2) à partir de laquelle ils se cassent. Pour 10 cylindres utilisés, on relève les pressions suivantes : 19.6 ; 19.9 ; 20.4 ; 19.8 ; 20.5 ; 21.0 ; 18.5 ; 19.7 ; 18.4 ; 19.4 On suppose que X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

1. Calculer la moyenne et l'écart type de l'échantillon.
2. Trouver un intervalle de confiance de μ à 95% ?
3. Trouver un intervalle de confiance de σ^2 à 98% ?
4. Supposons dans cette question $\sigma^2 = 0,69$.
   Déterminer dans ces conditions un intervalle de confiance pour μ au niveau 95%.

Exercice 2.

On souhaite étudier les effets de deux neuroleptiques sur des patients psychotiques, en considérant le temps nécessaire pour calmer leur crise d'angoisse. On applique à 11 patients de neuroleptique A et aux 14 autres de neuroleptique B. Les résultats résumés sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Groupe $A(X_{1i})$	$\sum_{i=1}^{11} X_{1i} = 14.6$	$\sum_{i=1}^{11} X_{1i}^2 = 233.4$
Groupe $B(X_{2i})$	$\sum_{i=1}^{14} X_{2i} = 39.9$	$\sum_{i=1}^{14} X_{2i}^2 = 198.91$

1. Trouver un intervalle de confiance de μ_1 à 95% ?
2. Trouver un intervalle de confiance de σ_2^2 à 90% ?

3. Trouver un intervalle de confiance pour $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ à 98% ? Que pouvez-vous dire sur les variances des deux populations ?
4. Trouver un intervalle de confiance pour la différence $\mu_1 - \mu_2$ à 98% ? Que pouvez-vous dire sur les moyennes des deux populations ?

Exercice 3.

Un passager du métro mesure son temps de trajet domicile-travail pendant 10 jours et relève successivement (en minutes) : 32 ; 25 ; 28 ; 36 ; 30 ; 26 ; 37 ; 25 ; 33 ; 28 .
Un autre itinéraire emprunté par notre voyageur pendant les jours suivants et qui lui prend : 36 ; 21 ; 24 ; 38 ; 34 ; 22 ; 37 ; 20 ; 25 ; 23 minutes.

1. Calculer la moyenne et l'écart type des deux échantillons.
2. Quel est l'intervalle de confiance au niveau 95% de la moyenne du premier trajet ?
3. Quel est l'intervalle de confiance au niveau 98% de la variance du second trajet ?
4. Donner un intervalle de confiance au niveau 90% du rapport des deux variances $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ et de la différence des deux moyennes $\mu_1 - \mu_2$. Conclusion ?

Exercice 4.

Une entreprise vend des bouchons de liège pour bouteilles de vin. Dans un souci de productivité, elle décide de traiter ses chênes-lièges avec des produits chimiques pour qu'ils développent leur écorce plus vite. Ces traités chimiques peuvent altérer le liège et donner par la suite un goût bouchonné aux bouteilles. Dans la suite, on notera p la proportion de bouchons présentant un tel défaut. Un groupe de vignerons goûte 215 de ces bouteilles et en compte 13 bouchonnées.

1. Proposer une estimation ponctuelle de p.
2. Construire un intervalle de confance pour p au niveau 99%.

2 Corrigés

Corrigé 1.

1. La moyenne de l'échantillon $\overline{X}$ est donnée par :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i = \frac{1}{10}\sum_{1}^{10} X_i$$

$$\overline{X} = \frac{19.6 + 19.9 + 20.4 + 19.8 + 20.5 + 21.0 + 18.5 + 19.7 + 18.4 + 19.4}{10} = 19.72$$

2. La variance de l'échantillon $\overline{X}$ est donnée par :

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{1}^{10} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$S'^2 = \frac{(19.6 - 19.72)^2 + (19.9 - 19.72)^2 + ... + (18.4 - 19.72)^2 + (19.4 - 19.72)^2}{10-1} = 0.27$$

Donc l'écart-type est : $S' = 0.52$

3. L'intervalle de confiance de μ à 95% est :

$$\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\left(\frac{S'}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\left(\frac{S'}{\sqrt{n}}\right)$$

car $n < 30$ et σ est inconnu et la statistique de Student est $t_{\frac{0.05}{2}}(10-1) = 3.69$.

$$I_{c\mu} = 19.72 \pm 3.69 * \frac{0.52}{\sqrt{10}}$$

$$I_{c\mu} = [19.54, 19.90]$$

4. L'intervalle de confiance de σ^2 à 98% avec μ est inconnue est donné par :

$$\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}.$$

où $\chi^2_{1-\frac{0.02}{2}} = 21.666$ et $\chi^2_{\frac{0.02}{2}} = 2.088$ sont les valeurs du Khi-deux, avec $(10-1)$ degrés de libertés.

$$I_{c\sigma^2} = \left[\frac{10 * 0.27}{21.666}, \frac{10 * 0.27}{2.088}\right]$$

$$I_{c\sigma^2} = [0.12, 1.29]$$

5. En supposant que $\sigma^2 = 0,69$ et $n < 30$, alors l'intervalle de confiance pour μ au niveau 95% est donnée par :

$$\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$I_{c\mu} = 19.72 \pm 1.96 * \frac{0.69}{\sqrt{10}}$$

où $Z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$

$$I_{c\mu} = [19.63, 19.81]$$

Corrigé 2.

1. L'intervalle de confiance de μ à 95% est :

$$\overline{X}_1 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1)\left(\frac{S'_1}{\sqrt{n_1}}\right) \leq \mu_1 \leq \overline{X}_1 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1)\left(\frac{S'_1}{\sqrt{n_1}}\right)$$

car $n < 30$ et σ_1 est inconnu et la statistique de Student est $t_{\frac{0.05}{2}}(11-1) = 2.228$.

- La moyenne de l'échantillon $\overline{X}_1$ est donnée par :

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{1}^{n_1} X_{1i} = \frac{1}{11}\sum_{1}^{11} X_{1i}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{14.6}{11} = 1.33$$

- La variance de l'échantillon $\overline{X}$ est donnée par :

$$S'^2_1 = \frac{n_1}{n_1 - 1}\left[\frac{1}{n_1}\sum_{1}^{n} X^2_{1i} - \overline{X}^2_1\right] = \frac{11}{11-1}\left[\frac{1}{11}\sum_{1}^{11} X^2_{1i} - \overline{X}^2_1\right]$$

$$S'^2 = \frac{11}{10}\left[\frac{1}{11}233.4 - 1.33^2\right] = 21.39$$

- Donc l'écart-type est : $S_1' = 4.62$

$$I_{c\mu_1} = 1.33 \pm 2.228 * \frac{4.62}{\sqrt{11}}$$

$$I_{c\mu_1} = [-1.77, 4.43]$$

2. L'intervalle de confiance de σ_2^2 à 95% avec μ_2 est inconnue est donné par :

$$\frac{(n_2-1)S_2'^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1)} \leq \sigma_2^2 \leq \frac{(n_2-1)S_2'^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1)}.$$

   où $\chi^2_{1-\frac{0.1}{2}} = 22.36$ et $\chi^2_{\frac{0.1}{2}} = 5.89$ sont les valeurs du Khi-deux, avec $(14-1)$ degrés de libertés.

   - La moyenne de l'échantillon $\overline{X}_2$ est donnée par :

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{2}^{n_2} X_{2i} = \frac{1}{14}\sum_{1}^{14} X_{2i}$$

$$\overline{X}_2 = \frac{39.9}{14} = 2.85$$

   - La variance de l'échantillon $\overline{X}$ est donnée par :

$$S_2'^2 = \frac{n_2}{n_2-1}\left[\frac{1}{n_2}\sum_{1}^{n} X_{2i}^2 - \overline{X}_2^2\right] = \frac{14}{14-1}\left[\frac{1}{14}\sum_{1}^{14} X_{2i}^2 - \overline{X}_2^2\right]$$

$$S_2'^2 = \frac{14}{13}\left[\frac{1}{14}198.91 - 2.85^2\right] = 6.55$$

   - Donc l'écart-type est : $S_2' = 2.56$

$$I_{c\sigma_2^2} = \left[\frac{13*2.56}{22.36}, \frac{13*2.56}{5.89}\right]$$

$$I_{c\sigma_2^2} = [3.81, 14.46]$$

3. Comme μ_1 et μ_2 sont inconnues et $S_1'^2$ *et* $S_2'^2$ les variances de deux échantillons indépendants de tailles n_1 *et* n_2 tirées de deux populations normales de variances σ_1^2 *et* σ_2^2 respectivement. Alors,l'intervalle de confiance de $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ est :

$$\frac{{S_1}'^2}{{S_2}'^2 \ f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\lambda_1, \lambda_2)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{{S_1}'^2}{{S_2}'^2} \ f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\lambda_2, \lambda_1)$$

avec $f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\lambda_1, \lambda_2) = f_{1-\frac{0.02}{2}}(11-1, 14-1) = 4.10$ et $f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\lambda_2, \lambda_1) = f_{1-\frac{0.02}{2}}(14-1, 11-1) = 4.71$

$$\frac{21.39}{6.55(4.10)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{21.39}{6.55}(4.71)$$

$$I_{c\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = [0.80, 15.38]$$

4. D'après la question précédente, nous constatons que $1 \in [0.80, 15.38]$, alors $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.
Et puisque $n_1 \leq 30$ *et* $n_2 \leq 30$, on déduit que l'intervalle de confiance de $(\mu_1 - \mu_2)$ est :

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda) S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda) S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Où $t_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda) = t_{\frac{0.02}{2}}(n_1 + n_2 - 2) = t_{\frac{0.02}{2}}(11 + 14 - 2) = 2.5$.
Et la variance combinée des deux échantillons est donnée par :

$$S_c^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1'^2 + (n_2 - 1)S_2'^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

.

$$S_c^2 = \frac{(11-1)21.39 + (14-1)6.55}{11 + 14 - 2} = 13.00$$

$$S_c = 3.61$$

$$\mu_1 - \mu_2 = (1.33 - 2.85) \pm 2.5(3.61)\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{14}}$$

$$I_{c(\mu_1 - \mu_2)} = [-5.16, 2.12]$$

.

Puisque $0 \in [-5.16, 2.12]$, alors $\mu_1 = \mu_2$ Et part conséquent, on déduit que les deux échantillons sont issus de la même population.

Corrigé 3.

1. - La moyenne de l'échantillon $\overline{X}_1$ est donnée par :

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{1}^{n_1} X_{1i} = \frac{1}{10}\sum_{1}^{10} X_{1i}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{300}{10} = 30\ min$$

- La variance de l'échantillon $\overline{X}$ est donnée par :

$$S_1'^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1}\left[\frac{1}{n_1}\sum_{1}^{n} X_{1i}^2 - \overline{X}_1^2\right] = \frac{10}{10-1}\left[\frac{1}{10}\sum_{1}^{10} X_{1i}^2 - \overline{X}_1^2\right]$$

$$S'^2 = \frac{10}{9}\left[\frac{1}{10}9172 - 30^2\right] = 19.11\ min^2$$

- Donc l'écart-type est : $S_1' = 4.37\ min$
- La moyenne de l'échantillon $\overline{X}_2$ est donnée par :

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{2}^{n_2} X_{2i} = \frac{1}{10}\sum_{1}^{10} X_{2i}$$

$$\overline{X}_2 = \frac{280}{10} = 28\ min$$

- La variance de l'échantillon $\overline{X}$ est donnée par :

$$S_2'^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1}\left[\frac{1}{n_2}\sum_{1}^{n} X_{2i}^2 - \overline{X}_2^2\right] = \frac{10}{10-1}\left[\frac{1}{10}\sum_{1}^{10} X_{2i}^2 - \overline{X}_2^2\right]$$

$$S_2'^2 = \frac{10}{9}\left[\frac{1}{10}8320 - 28^2\right] = 53.33\ min^2$$

- Donc l'écart-type est : $S_2' = 7.30\ min$

2. L'intervalle de confiance de μ à 95% est :

$$\overline{X}_1 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1)\left(\frac{S_1^{'}}{\sqrt{n_1}}\right) \leq \mu_1 \leq \overline{X}_1 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1)\left(\frac{S_1^{'}}{\sqrt{n_1}}\right)$$

car $n < 30$ et σ_1 est inconnu et la statistique de Student est $t_{\frac{0.05}{2}}(10 - 1) = 2.262$.

$$I_{c\mu_1} = 30 \pm 2.262 * \frac{4.37}{\sqrt{10}}$$

$$I_{c\mu_1} = [26.87min, 33.13min]$$

3. L'intervalle de confiance de σ_2^2 à 98% avec μ_2 est inconnue est donné par :

$$\frac{(n_2 - 1)S_2^{'2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1)} \leq \sigma_2^2 \leq \frac{(n_2 - 1)S_2^{'2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1)}.$$

où $\chi^2_{1-\frac{0.02}{2}} = 21.67$ et $\chi^2_{\frac{0.02}{2}} = 2.09$ sont les valeurs du Khi-deux, avec $(10 - 1)$ degrés de libertés.

$$I_{c\sigma_2^2} = \left[\frac{9(53.33)}{21.67}, \frac{10(53.33)}{2.09}\right]$$

$$I_{c\sigma_2^2} = \left[22.15\ min^2, 229.65\ min^2,\right]$$

4. Comme μ_1 et μ_2 sont inconnues et $S_1^{'2}$ *et* $S_2^{'2}$ les variances de deux échantillons indépendants de tailles n_1 *et* n_2 tirées de deux populations normales de variances σ_1^2 *et* σ_2^2 respectivement. Alors,l'intervalle de confiance de $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ est :

$$\frac{{S_1}^{'2}}{{S_2}^{'2}\ f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\lambda_1, \lambda_2)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{{S_1}^{'2}}{{S_2}^{'2}}\ f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\lambda_2, \lambda_1)$$

avec $f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\lambda_1, \lambda_2) = f_{1-\frac{0.1}{2}}(10 - 1, 10 - 1) = 3.18$

$$\frac{19.11}{53.33(3.18)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{19.11}{53.33}(3.18)$$

$$I_{c\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = [0.11, 1.14]$$

5. D'après la question précédente, nous constatons que $1 \in [0.11, 1.14]$, alors $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

Et puisque $n_1 \leq 30$ *et* $n_2 \leq 30$, on déduit que l'intervalle de confiance de $(\mu_1 - \mu_2)$ est :

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda) S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda) S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Où $t_{\frac{\alpha}{2}}(\lambda) = t_{\frac{0.1}{2}}(n_1 + n_2 - 2) = t_{\frac{0.1}{2}}(10 + 10 - 2) = 1.734$.
Et la variance combinée des deux échantillons est donnée par :

$$S_c^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1'^2 + (n_2 - 1)S_2'^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

.

$$S_c^2 = \frac{(10 - 1)19.11 + (10 - 1)53.33}{10 + 10 - 2} = 36.22\ min^2$$

$$S_c = 6.02\ min$$

$$\mu_1 - \mu_2 = (30 - 28) \pm 1.734(6.02)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}$$

$$I_{c(\mu_1 - \mu_2)} = [-2.67\ min, 6.67\ min]$$

.
Puisque $0 \in [-2.67\ min, 6.67\ min]$, alors $\mu_1 = \mu_2$ Et part conséquent, on déduit que les deux trajets sont pareils .

Corrigé 4.

1. Une estimation ponctuelle de p est donnée par $\widehat{p} = f = \frac{13}{215} = 0.06$.
2. puisque $n = 215 > 30$, alors l'intervalle de confiance pour p au niveau 99% est :

$$f - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{f(1-f)/n} \leq p \leq f + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{f(1-f)/n}$$

Où $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.01}{2}} = 2.576$. Donc l'intervalle de confiance au seuil 0.01% pour p est :

$p = f \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{f(1-f)/n} = 0.06 \pm 2.576\sqrt{0.06(1-0.06)/215}$
$Ic_p = [0.018, 0.102]$.