Mme BOURAINE.

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Première année M.I

25/09/2019
Durée : 1h30mn

Rattrapage d'Algèbre 2

Exercice 1. (03 points)
Pour quelles valeurs du paramètre m, les vecteurs $(1,1,1)$, $(2,m,3)$ et $(4,m^2,9)$ forment-t-ils une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. (07 points)
Soit $\mathbf{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f, g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (x+z, 2y-z, x) \quad \text{et} \quad g(e_1) = e_1 + e_3, \quad g(e_2) = 2e_2 - e_3, \quad g(e_3) = e_1.$$

1 **1.** A-t-on $f = g$?

1+1 **2.** Déterminer les martices $M(f)$ et $M(g)$ associées à f et g respectivement, relativement à la base $\mathbf{B}$.

1,5 **3.** Quelle est l'image de $\mathbf{B}$ par l'application $h = 2f - g$.

1 **4.** $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $h(x,y,z)$ dans la base $\mathbf{B}$.

0,5+1 **5.** Donner par deux méthodes différentes la matrice $M(h)$ associée à h relativement à la base $\mathbf{B}$.

Exercice 3. (10 points)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base canonique } \mathbf{B}_c = (e_1, e_2, e_3).$$

1 **1.** Déterminer l'expression de f.

3,5 **2.** Soit $\mathbf{E} = \{u \in \mathbb{R}^3 / \ f(u) = -2u\}$ et $\mathbf{F} = \{v \in \mathbb{R}^3 / \ f(v) = 4v\}$.
Montrer que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3 = \mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$.

3. Soit $\mathbf{B}' = (e'_1 = (1,0,-1), e'_2 = (0,1,-1), e'_3 = (0,1,1))$ une base de $\mathbb{R}^3$.

1,5+1,5 **a)** Exprimer la matrice A' de f dans la base $\mathbf{B}'$. Calculer $(A')^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

0,5+1+1 **b)** Exprimer la matrice P de passage de la base $\mathbf{B}_c$ vers la base $\mathbf{B}'$. Calculer P^{-1}. Déduire A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

25/09/2019

Barème détaillé du Rattrapage d'Algèbre 2

Exercice 1 : 3pts.

Exercice 2 : 07pts

1°) 1pt.

2°) $M(f) \longrightarrow 1pt$, $M(g) \longrightarrow 1pt$.

3°) 1,5 pts.

4°) 1pt

5°) méthode directe $\longrightarrow$ 0,5pt ; $2M(A) - M(g) \longrightarrow 1pt$

Exercice 3 : 10pts

1°) $f(x, y, z) \longrightarrow 1pt$.

2°) 3,5pts
- E s.e.v. $\longrightarrow$ 0,75
- F : s.e.v $\longrightarrow$ 0,75.
- base + dim E, base + dim F et $\dim \mathbb{R}^3 = \dim E + \dim F$ $\longrightarrow$ 1,5 pts
- $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \longrightarrow 0,5$

3°) a) $A' \longrightarrow$ 1,5 pts

$(A')^n \longrightarrow$ 1,5 pts

b) $P \longrightarrow$ 0,5pt ; $P^{-1} \longrightarrow$ 1pt, $A^n = P(A')^n P^{-1} \longrightarrow$ 0,25.

Calcul $A^n \longrightarrow$ 0,75

1ère Année MI 2018/2019

Corrigé du Rattrapage d'Algèbre 2

Exercice 1 : 03 pts

On pose $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(2,m,3)$ et $v_3=(4,m^2,9)$.

v_1, v_2, v_3 forment une base de $\mathbb{R}^3 \iff$
$\{v_1, v_2, v_3\}$ famille libre de $\mathbb{R}^3 \iff \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 .$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + m\beta + m^2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 9\gamma = 0 \end{cases} \quad (S)$$

On a
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & m & m^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 - l_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & m-2 & m^2-4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5(m-2) - (m^2-4)$$
$$= (m-2)(3-m) .$$

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$, le système (S) est de Cramer, admet donc une unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

D'où $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$.

Conclusion : v_1, v_2, v_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$ pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$.

Exercice 2 : 07 pts

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$f(x,y,z) = (x+z,\ 2y-z,\ x)$, $g(e_1) = e_1 + e_3$, $g(e_2) = 2e_2 - e_3$, $g(e_3) = e_1$

1°) On a $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$g(x,y,z) = x\,g(e_1) + y\,g(e_2) + z\,g(e_3)$$

$$= x(e_1+e_3) + y(2e_2 - e_3) + z\,e_1.$$

1

$$= (x+z)e_1 + 2y\,e_2 + (x-y)e_3.$$

$$g(x,y,z) = (x+z,\ 2y,\ x-y)$$

$f \neq g$, en effet par exemple $f(1,1,1) = (2,1,1) \neq g(1,1,1) = (2,2,0)$

2°) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1, $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 1

3°) $h = 2f - g$.

$h(\mathcal{B}) = \{h(e_1), h(e_2), h(e_3)\}$.

0,5 $h(e_1) = 2f(e_1) - g(e_1) = 2(1,0,1) - (1,0,1)$

$= (1,0,1) = u_1$

0,5 $h(e_2) = 2f(e_2) - g(e_2) = 2(0,2,0) - (0,2,-1)$

$= (0,2,1) = u_2$

0,5 $h(e_3) = 2f(e_3) - g(e_3) = 2(1,-1,0) - (1,0,0) = (1,-2,0) = u_3$

Ainsi $h(\mathcal{B}) = \{u_1, u_2, u_3\}$

4°) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = x\,h(e_1) + y\,h(e_2) + z\,h(e_3)$

$$= (x+z)e_1 + (2y-2z)e_2 + (x+y)e_3$$

1 $\quad h(x,y,z) = (x+z,\ 2y-2z,\ x+y)$

5°) $M(h, B) = ?$

<u>1ère méthode</u>.

$$0{,}5 \quad M(h) = \begin{array}{c} \begin{matrix} h(e_1) & h(e_2) & h(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>2ème méthode</u>:

$$M(h) = 2M(f) - M(g)$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \quad M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : 10pts

$$M(f) = A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ds } B_c = (e_1, e_2, e_3)$$

1°) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 3x+y+3z \\ 3x+3y+z \end{pmatrix}$

D'où $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

4

$$f(x,y,z) = (-2x, 3x+y+3z, 3x+3y+z)$$

2°) $E = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -2u\}$, $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 4v\}$

E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$:

. On a $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -2\, 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$. 0,25

. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u_1, u_2 \in E$.

On a $f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$ car f linéaire

$= -2\alpha u_1 - 2\beta u_2$.

$= -2(\alpha u_1 + \beta u_2)$.

0,5

D'où $\alpha u_1 + \beta u_2 \in E$. Donc E s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

. F s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

. On a . $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = 4\, 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F$. 0,25

. $\forall v_1, v_2 \in F$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$

0,5

$= \alpha 4 v_1 + 4\beta v_2$

$= 4(\alpha v_1 + \beta v_2)$

D'où $\alpha v_1 + \beta v_2 \in F$

par conséquent F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

. $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$

Une base de E et dim E

$\forall (x,y,z) \in E \Rightarrow f(x,y,z) = -2(x,y,z)$

Donc $(-2x, 3x+y+3z, 3x+3y+z) = (-2x, -2y, -2z)$

$\Rightarrow 3x+3y+3z = 0.$

$\Rightarrow z = -x-y.$

D'où $\forall u \in E \Rightarrow u = (x, y, -x-y)$

$= x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$

$E = \langle u_1 = (1,0,-1), u_2 = (0,1,-1) \rangle.$ 0,5

Comme $\{u_1, u_2\}$ libre $\Rightarrow \boxed{\dim E = 2.}$
$\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ une base de E

• Une base et dim F :

$\forall (x,y,z) \in F$: On a $f(x,y,z) = 4(x,y,z)$

Donc $(-2x, 3x+y+3z, 3x+3y+z) = (4x, 4y, 4z)$

$\Rightarrow x = 0$ et $z = y$.

D'où $\forall v \in F \Rightarrow v = (0, y, y) = y(0,1,1)$.

comme $v_1 = (0,1,1) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \{v_1 = (0,1,1)\}$ est une base de F
et $\boxed{\dim F = 1}$ 0,5

Comme $\{u_1 = (1,0,-1),\ u_2 = (0,1,-1),\ v_1 = (0,1,1)\}$

est libre donc $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ 0,5

de plus $\dim \mathbb{R}^3 = \dim E + \dim F = 3 = 2 + 1$. 0,5

par conséquent $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

3°) $B' = (e'_1 = (1,0,-1),\ e'_2 = (0,1,-1),\ e'_3 = (0,1,1))$.

a) $A' = M(f, B') = ?$

On a $f(e'_1) = (-2,0,2) = -2(1,0,-1) = -2e'_1$

$f(e'_2) = (0,-2,2) = -2(0,1,-1) = -2e'_2$.

$f(e'_3) = (0,4,4) = 4(0,1,1) = 4e'_3$.

D'où $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 1,5

<u>Calcul de $(A')^n$</u> : par récurrence sur n.

<u>pour n=2</u>

On a $(A')^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ 0,5

On suppose que $(A')^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (4)^n \end{pmatrix}$ pour un certain n

$(A')^{n+1} = (A')^n \times A = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1

$$(A')^{n+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{n+1} \end{pmatrix}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} : (A')^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$

b) $P = M(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

<u>Calcul de P^{-1}</u> :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_3 \\ e'_2 = e_2 - e_3 \\ e'_3 = e_2 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = e'_1 - \frac{1}{2} e'_2 + \frac{1}{2} e'_3 . \\ e_2 = \frac{1}{2} e'_2 + \frac{1}{2} e'_3 . \\ e_3 = -\frac{1}{2} e'_2 + \frac{1}{2} e_3 . \end{cases}$$

1

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Déduire A^n</u> :

$$\begin{tikzcd} \underset{B'}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^3}", "P"'] \arrow[rrr, bend right, "f = Id_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ Id_{\mathbb{R}^3}"'] & \underset{B_c}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f", "A"'] & \underset{B_c}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^3}", "P^{-1}"'] & \underset{B'}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

On a $A' = P^{-1} A P \implies A = P A' P^{-1}$

$\implies \boxed{A^n = P A'^n P^{-1}}$ 0,25

$\forall n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 4^n \\ -(-2)^n & -(-2)^n & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(-2)^n & 0 & 0 \\ -(-2)^n+4^n & (-2)^n+4^n & -(-2)^n+4^n \\ (-2)^{n+1}+(-2)^n+4^n & -(-2)^n+4^n & (-2)^n+4^n \end{pmatrix}$$

0,25