# Table des matières


**1 Notions de logique** **2**

1.1 Définitions . . . . . . . . . . 2

1.2 Les connecteurs logiques . . . . . . . . . . 3

1.2.1 Propriétés . . . . . . . . . . 6

1.3 Les quantificateurs . . . . . . . . . . 7

1.4 Les types de raisonnement . . . . . . . . . . 8

1.4.1 Raisonnement par table de vérité . . . . . . . . . . 8

1.4.2 Raisonnement direct . . . . . . . . . . 9

1.4.3 Raisonnement par contraposée . . . . . . . . . . 9

1.4.4 Raisonnement par l'absurde . . . . . . . . . . 10

1.4.5 Raisonnement par contre exemple . . . . . . . . . . 10

1.4.6 Raisonnement par récurrence . . . . . . . . . . 11

# Chapitre 1

# Notions de logique

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes qui rend les calculs exactes vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider une hypothèse et de l'expliquer à autrui.

## 1.1 Définitions

**Une assertion** est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguité s'il est vrai ou s'il est faux.
Si une assertion est vraie, on lui attribue la valeur logique, 1 (ou V), si elle est fausse, on lui attribue la valeur logique 0, (ou F).

**Exemple 1.1.** « $3 < 10$ » *est une assertion vraie.*
« *Tout nombre premier est impair* » *est une assertion fausse.*
« *Tout triangle isocèle est équiangles* » *est une assertion fausse.*

Une assertion qui est toujours vraie, par exemple, « $x^2 \geq 0$, pour tout x réel », est appellé **tautologie**.

### Une proposition

Une proposition est une assertion qui dépend d'une ou plusieurs variables, elle est vraie pour certaines valeurs attribuées aux variables, fausse pour toutes les autres.

*Remarque* 1.1. Les propositions sont représentées par des lettres majuscules : $P, Q, R, \ldots$.

**Exemple 1.2.** $\ll P : x > 10 \gg$ *vraie pour les nombres supérieurs strictement à 10, fausse pour les autres cas.*

### Les types de propositions

- **Axiome :** Un axiome est un énoncé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.

  **Exemple 1.3.** *Axiome d'Euclide : ≪ par un point exterieur à une droite, il passe une seule droite parallèle à cette droite ≫.*
- **Théorème :** C'est une proposition dont on démontre qu'elle est vraie. (par exemple : Théorème de Pythagore, théorème de Thalès ).

  Dans les prochains chapitres, proposition désignera un théorème intermédiaire.
- **Corollaire :** Un corollaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème.
- **Lemme :** Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus drande importance.
- **Conjecture :** Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer.

  **Exemple 1.4.** *Conjecture de Fermat : ≪ Si* $n \geq 3$*, il n'existe pas d'entiers naturels tous non nuls* $x, y, z$ *tel que :* $x^n + y^n = z^n$ *≫ (XVII siècle).*

## 1.2 Les connecteurs logiques

A partir d'assertions données, on peut former de nouvelles assertions à l'aide de connecteurs logiques.

### La négation

La négation d'une proposition $P$, noté par $\bar{P}$ oubien $\neg P$, est vraie (valeur de vérité 1) si $P$ est fausse (valeur de vérité 0) et est fausse si $P$ est vraie.

**Table de vérité**

| $P$ | $\overline{P}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

## La conjonction

La conjonction de deux propositions $P$ et $Q$ et la proposition notée « $P$ et $Q$ » oubien $P \wedge Q$, elle est vraie si et seulement si $P$ et $Q$ sont vraies simultanément et fausse dans tous les autres cas.

**Table de vérité**

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

**Exemple 1.5.** « $(3 > 2) \wedge$ *(4 est pair)* » *est une proposition vraie.*
« $(5 > 10) \wedge (2 < 3)$ » *est une proposition fausse.*

## La disjonction

La disjonction de deux propositions $P$ et $Q$ notée « $P$ ou $Q$ » oubien $P \vee Q$, est fausse si et seulement si les deux propositions sont fausses simultanément et vraie dans les autres cas.

**Table de vérité**

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

**Exemple 1.6.** « $(3 > 2) \vee$ *(4 est pair)* » *est une proposition vraie.*
$\ll$ $(5 > 10) \vee (2 > 3)$ » *est une proposition fausse.*

### Implication

Soient $P$ et $Q$ deux propositions, l'implication notée $P \Longrightarrow Q$, qu'on lit si $P$ alors $Q$ oubien $P$ est une condition suffisante pour $Q$ et que $Q$ est une condition nécessaire pour $P$. Elle est vraie si $P$ est fausse, oubien si $P$ et $Q$ sont simultanément vraies.

**Table de vérité**

| $P$ | $Q$ | $P \Longrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

*Remarque* 1.2. L'implication $P \Longrightarrow Q$ est fausse dans un seul cas :si $P$ est vraie et $Q$ est fausse. On remarque que les valeurs de vérité de la proposition $\overline{P} \vee Q$ sont les mêmes que $P \Longrightarrow Q$

| $P$ | $Q$ | $\overline{P}$ | $\overline{P} \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

L'implication $Q \Longrightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P \Longrightarrow Q$.
L'implication $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ s'appelle l'implication contraposée de $P \Longrightarrow Q$.

**Exemple 1.7.** *1.* $0 \leq x \leq 25 \Longrightarrow \sqrt{x} \leq 5$ *est vraie.*

*2.* $x \in ]-\infty, -4[ \Longrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ *est vraie.*

*3.* $x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2$ *est fausse.*

*4.* $2 + 2 = 5 \Longrightarrow \sqrt{2} = 2$ *est vraie.*

## Propositions équivalentes

Deux propositions $P$ et $Q$ sont équivalentes si chacune d'elle implique l'autre, on la note $P \Longleftrightarrow Q$, elle est vraie si et seulement si elles sont vraies ou fausses simultanément.

On dit que $P$ est une condition necessaire et suffisante de $Q$.

**Table de vérité**

| $P$ | $Q$ | $P \Longleftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

**Exemple 1.8.** *Pour $x, y$ des réels :* $(|x| > |y|) \Longleftrightarrow (x^2 > y^2)$

$xy = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

**Récapulatif**

| $P$ | $Q$ | $\overline{P}$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Longrightarrow Q$ | $P \Longleftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

*Remarque* 1.3. Si on a trois propositopns $P$, $Q$, $R$ la table de vérité compporte 8 cas possibles pour les valeurs de vérité.

### 1.2.1 Propriétés

Soient $P, Q$ et $R$ trois propositions. Les équivalences suivantes sont vraies.

1. $\bar{\bar{P}} \Longleftrightarrow P$.
2. $\overline{(P \vee Q)} \Longleftrightarrow (\bar{P} \wedge \bar{Q})$.
3. $\overline{(P \wedge Q)} \Longleftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$.
4. $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P})$.
5. $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$.
6. $\overline{(P \Longrightarrow Q)} \Longleftrightarrow (P \wedge \bar{Q})$.
7. $[P \vee (Q \vee R)] \Longleftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$ ($\vee$ est associatif ).
   $[P \wedge (Q \wedge R)] \Longleftrightarrow [(P \wedge Q) \wedge R]$ ($\wedge$ est associatif ).
8. $[P \vee (Q \wedge R)] \Longleftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$ ($\vee$ est distributif par rapport à $\wedge$).
   $[P \wedge (Q \vee R)] \Longleftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$ ($\wedge$ est distributif par rapport à $\vee$).

9. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$.

*Démonstration.* On utilise la table de vérité. On démontre **5.** et **7.** Les autres propriétés à démontrer à titre d'exercice.

**5.** $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$.

| $P$ | $Q$ | $\overline{P}$ | $P \Longrightarrow Q$ | $\overline{P} \vee Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

On remarque que les colonnes 4 et 5 ont les mêmes valeurs de vérité. Donc les deux propositions sont bien équivalentes.

De la même manière, on démontre

**7.** $[P \vee (Q \vee R)] \Longleftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \vee R$ | $P \vee (Q \vee R)$ | $P \vee Q$ | $(P \vee Q) \vee R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

□

## 1.3 Les quantificateurs

Une proposition peut dépendre d'une variable $x$, on la note dans ce cas : $P(x)$. Elle est vraie ou fausse selon la valeur de $x$.

- Si $P(x)$ est vraie pour tout $x$, on écrit : $\forall\ x,\ \ P(x)$. $\forall$ est appelé **quantificateur universel**, on lit **pour tout** ou **quelque soit**.
- S'il existe au moins une valeur de $x$ pour laquelle $P(x)$ est vraie, on écrit $\exists\ x, P(x)$. $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**, on lit **il existe au moins un**.
- Le quantificateur **il existe un unique** est noté par $\exists!$.

- La proposition $\exists! x \in \mathbf{E}, P(x)$ est vraie lorsque il existe un unique $x$ dans $\mathbf{E}$, telle que la proposition $P(x)$ soit vraie.
- La négation de $\forall x \in \mathbf{E}, P(x)$ est $\exists x \in \mathbf{E}$, non $P(x)$.
- La négation de $\exists x \in \mathbf{E}, P(x)$ est $\forall x \in \mathbf{E}$, non $P(x)$.

**Exemple 1.9.** *1.* $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ *est une proposition vraie.*

*2.* $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ *est une proposition fausse.*

*3.* $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$ *est vraie.*

*4.* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$ *est vraie*

*5.* $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + y = 0$ *est fausse.*

*6.* $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : xy < 0$ *est vraie*

*7.* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : xy \geq 0$ *est fausse*

*8.* $\exists! n \in \mathbb{N}, n^2 = 4$ *est vraie*

*La négation de la proposition 4 est*

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y \neq 0.$

**Exercice** Ecrire en utilisant les quantificateurs les proposition suivantes : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. $f$ est une fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $f$ est continue en un point $x_0$.

## 1.4 Les types de raisonnement

### 1.4.1 Raisonnement par table de vérité

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on vérifie que sa table de vérité ne contient que des valeurs vraies.

**Exemple 1.10.** *Soit $P$, $Q$ deux propositions. Montrer que $\overline{P} \Longrightarrow (Q \vee \overline{P})$ est vraie quelque soient les valeurs de vérité de $P$ et $Q$.*

| $P$ | $Q$ | $\overline{P}$ | $Q \vee \overline{P}$ | $\overline{P} \Longrightarrow (Q \vee \overline{P})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

### 1.4.2 Raisonnement direct

Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et on montre qu'alors $Q$ est vraie.

**Exemple 1.11.** *Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.*

$$\begin{aligned}
a, b \in \mathbb{Q} \quad &\Longrightarrow \quad a = \frac{p}{q} \text{ et } b = \frac{p'}{q'} \text{ avec } p, p' \in \mathbb{Z} \text{ et } q, q' \in \mathbb{Z}^* \\
&\Longrightarrow \quad a + b = \frac{pq' + qp'}{qq'} \\
&\Longrightarrow \quad a + b \in \mathbb{Q} \quad \text{car } pq' + qp' \in \mathbb{Z} \text{ et } qq' \in \mathbb{Z}^*
\end{aligned}$$

### 1.4.3 Raisonnement par contraposée

Il est basé sur l'équivalence $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.
Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on suppose que $\overline{Q}$ est vraie et on montre qu'alors $\overline{P}$ est vraie.

**Exemple 1.12.** *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ est pair $\Longrightarrow n$ est pair.*
*Il suffit de montrer la contraposée : $n$ est impair $\Longrightarrow n^2$ est impair.*
*On utilisant le raisonnement direct :*

$$\begin{aligned}
n \text{ est impair} \quad &\Longrightarrow \quad n = 2k + 1, \ k \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \quad n^2 = (2k + 1)^2 \\
&\Longrightarrow \quad n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\
&\Longrightarrow \quad n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \\
&\Longrightarrow \quad n^2 \text{impair.}
\end{aligned}$$

*D'où $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ est pair $\Longrightarrow n$ est pair.*

**Exemple 1.13.** *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 = 2 \Longrightarrow x < 2.$

### 1.4.4 Raisonnement par l'absurde

*Pour montrer que* $P \Longrightarrow Q$ *est vraie, on suppose à la fois que* $P$ *est vraie et que* $Q$ *est fausse et on cherche une contradition.*

**Exemple 1.14.** *Soient* $a, b \geq 0$*. Montrer que* $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b.$
*Raisonnons par l'absurde : On suppose que* $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ *et* $a \neq b$*.*

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} &\Longrightarrow a(1+a) = b(1+b) \\
&\Longrightarrow a + a^2 = b + b^2 \\
&\Longrightarrow a^2 - b^2 = b - a \\
&\Longrightarrow (a-b)(a+b) = b - a = -(a-b) \\
&\Longrightarrow a + b = -1 \ (\textit{en divisant sur } a - b \neq 0)
\end{aligned}$$

*Contradiction car* $a, b \geq 0$*. D'où* $\forall a, b \geq 0, \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b.$

**Exemple 1.15.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *: Montrer que* $\sqrt{n^2+1}$ *n'est pas entier.*

### 1.4.5 Raisonnement par contre exemple

*Montrer que* $\forall x \in \mathbb{E}, P(x)$ *est fausse revient à montrer* $\exists x \in \mathbb{E}, \overline{P(x)}$ *est vraie.*

**Exemple 1.16.** *Montrer que l'assertion suivante est fausse : « Tout entier positif est somme de 3 carrés inférieurs à cet entier ».*
*Contre exemple : 7*
*Les carrés inférieurs à 7 sont :*$0^2, 1^2, 2^2$ *mais* $0^2 + 1^2 + 2^2 \neq 7$

**Exemple 1.17.** *Si* $f$ *et* $g$ *sont deux fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$*.*
*Peut-on déduire que* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 0$
*Non. Voici un contre exemple : on prend* $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = -x$*.*

*on a bien* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x) = -\infty$ *mais*
$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^2(1-\frac{1}{x}) = +\infty \neq 0.$

### 1.4.6 Raisonnement par récurrence

*Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour faire un raisonnement par récurrence, on suit les trois étapes suivantes :*

*(i) Initialisation : On vérifie que $P(0)$ est vraie.*

*(ii) Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain n fixé.*

*(iii) On démontre que $P(n+1)$ est vraie.*

**Exemple 1.18.** *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

*(i) Initialisation : Pour* $n = 0,\ 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ *vraie.*

*(ii) Hérédité : On suppose que pour n fixé,* $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

*(iii) On démontre que la proposition est vraie à l'ordre* $(n+1)$
$\sum\limits_{k=0}^{n+1} k = \sum\limits_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *est vraie.*

*Conclusion :* $\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$