Chapitre 6 : Modèles non linéaires

6.1. Présentation des modèles non linéaires

Dans l'expression « modèle linéaire », le mot « linéaire » doit s'entendre comme linéaire par rapport aux paramètres à estimer et non comme linéaire par rapport aux variables exogènes.

Il en résulte que la formulation linéaire générale $Y = Xa + \varepsilon$ est beaucoup moins restrictive qu'il peut sembler à priori. Un changement de variable transforme le modèle initial au modèle linéaire.

i) Transformation inverse

Le modèle $y = a_0 + a_1 \frac{1}{x}$ devient : $y = a_0 + a_1 X_1$ avec $X_1 = \frac{1}{x}$

ii) La transformation log-log

Le modèle $y = a_0 x_1^{a_1} . x_2$ devient : $\log y = \log a_0 + a_1 log\ x_1 + a_2 \log x_2$, ou encore :

z= $b_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$ avec : $z = \log y$, $b_0 = \log a_0$, $X_1 = \log x_1$, $X_2 = \log x_2$.

iii) La transformation semi-log

Le modèle $y = a_0 + a_1 log\ x_1$ devient : $y = a_0 + a_1 X_1$ avec : $X_1 = \log x_1$

iv) Le modèle y= $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2$ devient : y= $a_0 + a_1 x_1 + a_2 X_2$ avec $X_2 = x_2^2$.

Pour les transformations indiquées ci-dessus, les estimations des paramètres se fait par application de la méthode des MCO.

6.2. Le modèle logistique

Le modèle logistique est définit par : $y = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-a_2 t}}$

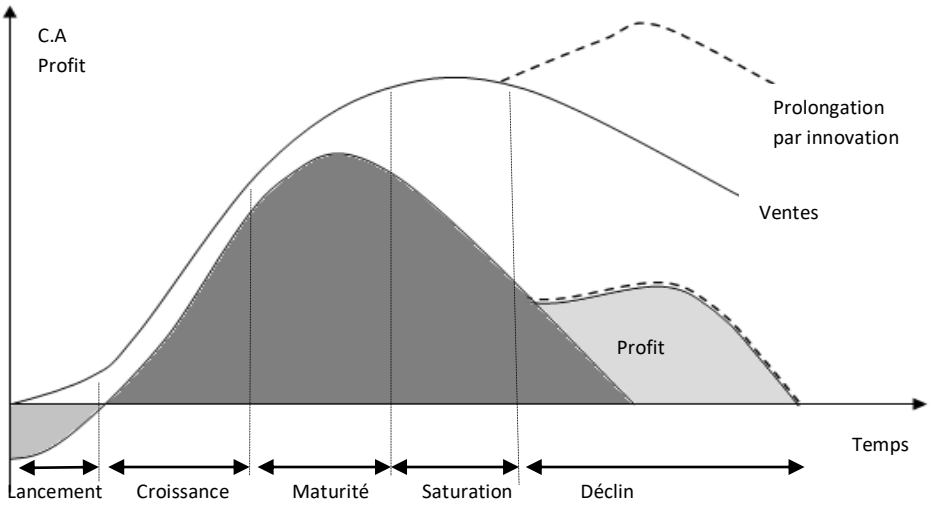
où t : représente le temps ; a_0, a_1, a_2 : représentent des constantes ($a_0 > 0$, $a_2 > 0$).

L'équation logistique est utilisée pour les ajustements sur une longue période, par exemple, l'évolution du taux d'équipement de télévision des ménages en fonction du temps. On l'appelle modèle de *courbe de vie*.

6.2.1. Exemple de courbe de vie

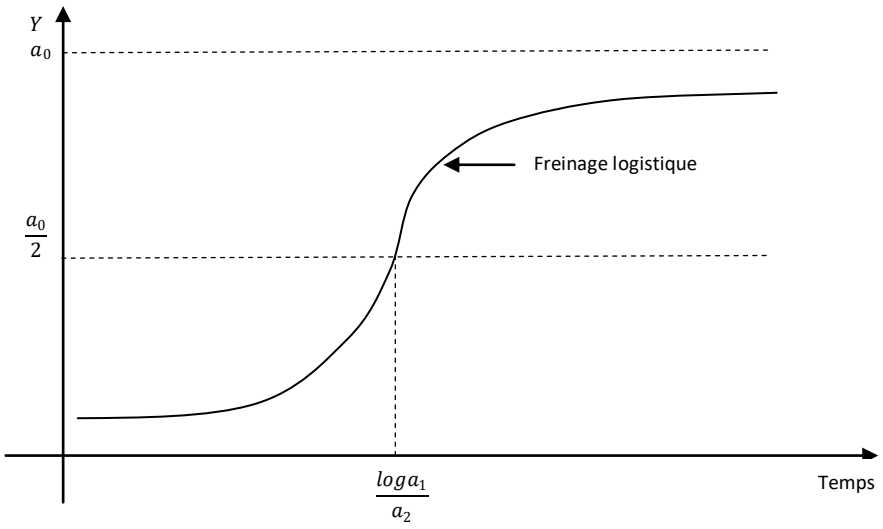
Le graphique (Cf figure 6.1) présente la notion du cycle de vie des ventes qui évoluent en fonction du temps ; le démarrage est relativement lent lorsque le produit est nouveau, puis elles connaissent une croissance rapide. La courbe passe par la suite par un point d'inflexion à partir duquel le rythme de croissance des ventes diminue. Cette phase (maturité), au cours de laquelle est réalisé l'essentiel des profits, se termine par un maximum, à partir duquel ce sont les ventes qui fléchissent.

Figure 6.1. Courbe de vie et de rentabilité d'un produit



6.2.2. Représentation graphique

Figure 6.2. Courbe logistique



6.2.3. Estimation de $a_1$et a_2 pour $a_0 = y_{max}$

Pour estimer $a_1$et a_2, on commence par la linéarisation de la fonction logistique :

$$y = \frac{a_0}{1+a_1 e^{-a_2 t}} = \frac{y_{max}}{1+a_1 e^{-a_2 t}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_{max}}{y} = 1 + a_1 e^{-a_2 t} \Leftrightarrow \frac{y_{max}}{y} - 1 = a_1 e^{-a_2 t} \Leftrightarrow \log(\frac{y_{max}}{y} - 1) = \log a_1 - a_2 t$$

$$\Leftrightarrow z = b_0 + b_1 t$$

avec : z=log($\frac{y_{max}}{y} - 1$) , $b_0 = \log a_1$, $b_1 = -a_2$.

Avec les moindres carrés ordinaires MCO, on calcule les estimateurs $\hat{b}_0$ et $\hat{b}_1$; les estimateurs $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ se déduisent de $\hat{b}_0 = \log \hat{a}_1 \Leftrightarrow \hat{a}_1 = e^{\hat{b}_0}$ et $\hat{b}_1 = -\hat{a}_2 \Leftrightarrow \hat{a}_2 = -\hat{b}_1$.

6.3. Méthode d'estimation des modèles non linéaires

La difficulté d'estimation de ce type de modèle réside dans le fait qu'ils ne sont pas linéaires. L'emploi du modèle de régression est donc impossible tel quel.

Néanmoins, il est possible de les linéariser lorsque l'on connait, ou plutôt que l'on postule la valeur du seuil de saturation (car on ne le connait jamais vraiment). Ainsi, nous pouvons distinguer différentes approches dans l'estimation de ce type de modèle :

6.3.1. Les approches intuitives

Dans les approches intuitives nous émettons des hypothèses sur les valeurs du niveau de saturation. Le seuil de saturation peut être estimé par analogie avec un processus similaire, mais dont le lancement est plus ancien. Nous pouvons affiner cette estimation par l'emploi d'une méthode de balayage. Cette technique consiste à déterminer un intervalle probable dans lequel se place le seuil de saturation [S_{min} , S_{max}], puis un *pas* ((S_{min} - S_{max}) /10 par exemple) qui permet d'aller de S_{min} à S_{max} après un certains nombre d'itérations (10 dans notre exemple). Par une méthode de régression sur le temps employée sur le modèle linéarisé, nous pouvons calculer la somme des carrés des résidus (SCR) ; le seuil optimal est celui qui correspond au minimum des SCR_i calculées.

6.3.2. Les méthodes de résolution analytique

L'estimation des méthodes des modèles logistiques peut être effectué par des méthodes de régression non linéaire qui nécessitent des procédures numériques itératives assez complexes.

Il s'agit des méthodes itératives dans lesquelles l'équation non linéaire est linéarisée à l'aide d'un développement limité de Taylor.

Les MCO sont alors utilisés sur cette équation linéaire afin d'estimer des nouveaux coefficients ; ces nouveaux coefficients permettent, à l'aide d'un nouveau développement limité de procéder à une nouvelle linéarisation. La procédure est arrêtée lorsque les coefficients sont relativement stables d'une itération à l'autre.

Parmi les méthodes, on cite : la méthode de Gauss newton, la méthode de Newton Raphson…etc.

Références bibliographiques

1. Brigitte Dormont, « Introduction à l'économétrie » Ed Montchrestien, Paris 1999.
2. Domadar N. Gujarati, « Econométrie ». Ed de boeck, Bruxelles, 2004.
3. Régis Bourbonnais, « Econométrie, manuel et exercices corrigés ». Ed Dunod, Paris 2015.
4. Régis Bourbonnais, « Exercices pédagogiques d'économétrie ». Ed Economica Paris 2015.
5. William Greene, « Econometric analysis ». Ed Pearson, New York, 2018.
6. William Greene, **«** Économétrie. Annexes : exercices et corrigés. » Ed Pearson, New York, 2006.