Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ **année ST**
Année universitaire
2023 / 2024

Corrigé de la série de TD n°1

Exercice n°1

1. $\int (\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x})dx$

On a

$$\begin{aligned}\int (\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x})dx &= -2\int \frac{-1}{x^2}dx + 3\int \frac{1}{x}dx \\ &= -2\frac{1}{x} + 3\ln|x| + c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. $\int \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}dx$

On a

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}dx = \int \frac{2(x+3)}{2\sqrt{x^2+6x}}dx = \sqrt{x^2+6x}+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

L'utilisation de $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)}+$ c.

3. $\int \cos(7x+1)dx$.

On a,

$$\begin{aligned}\int \cos(4x+2)dx &= \frac{1}{4}\int 4\cos(4x+2)dx \\ &= \frac{1}{4}\sin(4x+2)+c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

L'utilisation de $\int f'(x)g(f(x))dx = G(f(x))+c$, où G est la primitive de g et $c\in\mathbb{R}$.

4. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$. On a,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x^2}dx &= -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c, c\in\mathbb{R} \\ &= \frac{-1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

L'utilisation de $\int f'(x)f^{\alpha}(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c, \alpha, c\in\mathbb{R}$.

5. $\int e^x\left(1+e^x\right)^4dx$

On a

$$\int e^x\left(1+e^x\right)^4dx = \frac{\left(1+e^x\right)^5}{5}+c, c\in\mathbb{R}$$

L'utilisation de $\int f'(x)f^n(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$.
6. $\int \frac{6x-6}{x^2-2x+3}dx$
On a

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-6}{x^2-2x+3}dx &= 3\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}dx\\ &= 3\ln\left|x^2-2x+3\right| + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

L'utilisation de $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c, c \in \mathbb{R}$.

Exercice n°2

En utilisant l'intégration par parties, calculer
1. $\int(2x+1)e^x dx$.
On pose

$$\begin{aligned}u(x) = (2x+1) &\Rightarrow u'(x) = 2,\\ v'(x) = e^x &\Rightarrow v(x) = e^x,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int(2x+1)e^x dx &= (2x+1)e^x - \int 2e^x dx\\ &= (2x+1)e^x - 2e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}\\ &= (2x-1)e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. $\int x^2 \cos x dx$
on pose :

$$\begin{aligned}u(x) = x^2 &\Rightarrow u'(x) = 2x\\ v'(x) = \cos x &\Rightarrow v(x) = \sin x\end{aligned}$$

donc

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx,$$

Intégrons par partie une deuxième fois :
on pose :

$$\begin{aligned}u(x) = x &\Rightarrow u'(x) = 1\\ v'(x) = \sin x &\Rightarrow v(x) = -\cos x\end{aligned}$$

donc

$$\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x,$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + c\\ &= \left(x^2-2\right)\sin x + 2x\cos x + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

3. $\int \arctan x \, dx$
on pose :

$$u(x) = \arctan x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

donc

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$
$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R}$$

4. $\int e^{-x} \sin x dx$
On pose

$$u(x) = e^{-x} \Longrightarrow u'(x) = -e^{-x}$$
$$v'(x) = \sin x \Longrightarrow v(x) = -\cos x.$$

Donc

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx$$

encore une deuxième fois intégration par parties pour $\int e^{-x} \cos x dx$

$$u(x) = e^{-x} \Longrightarrow u'(x) = -e^{-x}$$
$$u'(x) = \cos x \Longrightarrow u(x) = \sin x$$
$$\int e^{-x} \cos x dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx$$

Finalement,

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx \right)$$
$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$

Exercice n°3

En effectuant un changement de variable, calculons
a) $\int \frac{e^{2x+1}}{2+5e^{2x+1}} dx$.
En posant

$$t = e^{2x+1} \Rightarrow dt = 2e^{2x+1} dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2e^{2x+1}} dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2t} dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{(2x+1)}}{2+5e^{(2x+1)}}dx &= \int \frac{t}{2+5t}\frac{1}{2t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2+5t}dt \\
&= \frac{1}{10}\int \frac{5}{2+5t}dt \\
&= \frac{1}{10}\ln|2+5t| + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{10}\ln\left|2+5e^{2x+1)}\right| + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$

On pose :

$t^2 = x-1 \Rightarrow dx = 2tdt$ et $x = t^2+1$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = 2\int \frac{t}{t^2+1}(tdt) &= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt \\
&= 2\int dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt \\
&= 2t - 2\arctan t + c, c \in \mathbb{R} \\
&= 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + c, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

c) $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^4}dx$

On pose :

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^4}dx &= \int \frac{1}{(1+t)^4}dt \\
&= \frac{-1}{3}\frac{1}{(1+t)^3} + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{-1}{3(1+\sin x)^3} + c, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Exercice n°4

Calculons :

a) A priori il faut décomposer $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ en éléments simples mais

$$(x-2)(x+5) = x^2+3x-10$$

Donc $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ est de la forme $\frac{f'(x)}{f(x)}$ et alors

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \ln\left|x^2+3x-10\right| + +c, c \in \mathbb{R}.$$

b)

$$\int \frac{x^3}{x^2 - x - 6} \, \mathrm{d}x$$

1-ère étape : effectuer la division euclidienne

$$\frac{x^3}{x^2 - x - 6} = x + 1 + \frac{7x + 6}{x^2 - x - 6}$$

2-ème étape : décomposer en fractions simples

$$\frac{7x + 6}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A + 2B)}{(x+2)(x-3)}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} (A+B) = 7 \\ (-3A + 2B) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A + 3B = 21 \\ (-3A + 2B) = 6 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{8}{5}, B = \frac{27}{5},$$

d'où

$$\frac{7x + 6}{x^2 - x - 6} = \frac{7x + 6}{(x+2)(x-3)} = \frac{\frac{8}{5}}{x+2} + \frac{\frac{27}{5}}{x-3} = \frac{8}{5(x+2)} + \frac{27}{5(x-3)}.$$

Puis,

$$\frac{x^3}{x^2 - x - 6} = x + 1 + \left(\frac{8}{5}\right) \frac{1}{x+2} + \left(\frac{27}{5}\right) \frac{1}{x-3}$$

3-ème étape : intégrer

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 - x - 6} \, \mathrm{d}x &= \int (x+1)\mathrm{d}x + \frac{8}{5} \int \frac{1}{x+2} \, \mathrm{d}x + \frac{27}{5} \int \frac{1}{x-3} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{8}{5} \ln|x+2| + \frac{27}{5} \ln|x-3| + c \end{aligned}$$

c) $\int \dfrac{3x+1}{x^2 - 2x + 10} dx$.
On a :

$$x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$$

On pose : $x-1=3t \Rightarrow dx = 3\,dt$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx &= \int \frac{3(3t+1)+1}{9t^2+9}3dt \\
&= \int \frac{27t+12}{9(t^2+1)}dt \\
&= 3\int \frac{t}{t^2+1}dt + \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}dt \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{4}{3}\ \arctan(t) + c, c \in \mathbb{R}, \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1\right) + \frac{4}{3}\ \arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercice n°5

Intégrons les fonctions trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\pi \cos^3 x dx \\
&= \int_0^\pi \cos^2 x \cos x dx \\
&= \int_0^\pi \left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx \\
&= \int_0^\pi \cos x dx - \int_0^\pi \sin^2 x(\cos x) dx
\end{aligned}$$

Calculons $\int \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x$.
On pose $t=\sin(x), dt = \cos(x)\mathrm{d}x$. Donc

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \int t^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}\sin^3(x) + c.$$

Alors $I_1 = [\sin x]_0^\pi - \frac{1}{3}[\sin^3 x]_0^\pi = 0$.

$I_2 = \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx$.
On utilise les deux formules suivantes :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

et

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sin^2 x\cos^2 x &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\\
&= \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\\
&= \frac{1}{4}\left(1-\cos^2(2x)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)\right)\\
&= \frac{1}{8}(1-\cos(4x))
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2 x\cos^2 x dx &= \int_0^\pi \frac{1}{8}(1-\cos(4x))dx\\
&= \frac{1}{8}\int_0^\pi (1-\cos(4x))dx\\
&= \left[\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin(4x)\right)\right]_0^\pi\\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x\sin 3x dx$$

On utilise la formule suivante :

$$\cos a\sin b = \frac{1}{2}[\sin(b-a)+\sin(a+b)],$$

donc :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}[\sin(3x-2x)+\sin(3x+2x)]dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 5x dx\\
&= \left[-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
&= 2[x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 2\frac{\pi}{4} - \left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}
$$